

Tutorium zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“

21. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \geq 2}$ mit $a_n = \frac{1}{n(n^2 - 1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

a) Man zeige, daß für die n -te Partialsumme $s_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}$ gilt.

b) Man zeige, daß die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 1)}$ konvergiert, und bestimme ihre Summe.

22. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_n = \frac{n+1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Man zeige

$$\sum_{k=0}^n a_k = 4 - \frac{n+3}{2^n}$$

und

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^n \cdot \frac{3n+5}{2^n} \right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Man untersuche die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ jeweils auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihre Summen.

23. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2004*). Man bestimme alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^n}$$

konvergiert, und berechne hierfür die Summe der Reihe.

24. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2004*). Für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver Zahlen zeige man:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n} \text{ divergent.}$$