MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 5
16.11.2015

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

17. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2002).* Sei $z \in \mathbb{Z}$. Man berechne:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2\right)$.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2n+2}$.

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2k}$.

18. Man bestimme die Häufungspunkte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) \qquad \text{und} \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right)\right)^n .$$

19. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2005).* Sei a eine reelle Zahl und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Es sei

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = a^2.$$

   Man beweise: Ist c Grenzwert einer konvergenten Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist $c = a$ oder $c = -a$.

20. Man betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Man zeige $a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell} \geq \frac{1}{2}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und folgere daraus, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge ist.