

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

13. Seien die reellen Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Für einen beliebigen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man die durch

$$a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + \beta \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- a) Man zeige für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die explizite Darstellung ihrer Folgenglieder

$$a_n = \alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- b) Man untersuche, für welche Werte von α, β und welche Startwerte a_0 die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

14. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009*). Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei definiert durch

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n^2 + \frac{3}{4}, \quad \text{mit } a_0 \in [1, 3].$$

- a) Man zeige, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ für alle $a_0 \in [1, 3]$ monoton fallend ist.
b) Man bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in Abhängigkeit von a_0 , falls der Grenzwert existiert.

15. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2012*). Man zeige, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{(2n^2 + 1)(n + 1)^n}{(3n + 1)n^{n+1}}$$

konvergiert, und bestimme den Grenzwert der Folge.

16. Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- a) Man zeige $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ und $\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
b) Man zeige, daß $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist.