MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 2
26.10.2015

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I"

5. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2006).* Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{\sin^3 n - 3\,\cos n}{\sqrt{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, und berechne für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

6. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2006).* Man zeige, daß die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2} \qquad \text{und} \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{7^k} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergieren, und berechne ihre Grenzwerte.

7. Man untersuche die Folgen

$$\left(\frac{(2\,n^2+3)^3}{(3\,n^3+2)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\frac{\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{\frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{und} \qquad \left((2\,n^2+3)^3 - (3\,n^3+2)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

auf Konvergenz und gebe gegebenenfalls den Grenzwert an.

8. Für die positiven Parameter $x, y \in \mathbb{R}^+$ betrachte man die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{x^n}{1 + y^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

   a) Sei zunächst $0 < x < 1$. Man zeige, daß dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
   b) Sei nun $x = 1$. Man zeige, daß dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimme in Abhängigkeit von $y > 0$ ihren Grenzwert.
   c) Sei schließlich $1 < x$. Man untersuche $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Abhängigkeit von $y > 0$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.