MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 1
19.10.2015

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

1. Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit

$$a_n = \frac{2\,n+1}{n+2} \qquad \text{bzw.} \qquad b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

   a) Man bestimme jeweils die ersten fünf Folgenglieder.

   b) Man untersuche $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

   c) Man weise jeweils anhand der Definition die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach.

2. a) Man zeige $n^3 < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$.

   b) Man folgere aus a), daß die Folge $\left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

   c) Zu $\varepsilon = 10^{-3}$ gebe man ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n^2}{2^n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ an.

3. Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Man beweise oder widerlege:

   a) Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist auch die Folge $(a_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

   b) Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist auch die Folge $(a_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

   c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch $(a_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

4. Sei $r \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl.

   a) Man begründe, daß es für alle $n \in \mathbb{N}$ rationale Zahlen a_n und $b_n \in \mathbb{Q}$ mit $r - \frac{1}{n} < a_n < r - \frac{1}{n+1}$ und $r + \frac{1}{n+1} < b_n < r + \frac{1}{n}$ gibt.

   b) Man zeige, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$ ist.

   c) Man zeige, daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = r$ ist.