MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 13
25.01.2016

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

49.

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ handelt es sich bei der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = e^{xn} = (e^x)^n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

um die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = e^x$; diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist, wegen

$$|e^x| < 1 \iff e^x < 1 \iff x < \ln 1 = 0$$

also genau für alle $x \in \left]-\infty, 0\right[$.

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ handelt es sich bei der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \text{mit} \qquad b_n = e^n x^n = (e\,x)^n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

um die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = e\,x$; diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist, wegen

$$|e\,x| < 1 \iff e \cdot |x| < 1 \iff |x| < \tfrac{1}{e} \iff -\tfrac{1}{e} < x < \tfrac{1}{e}$$

also genau für alle $x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$.

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $e^x \leq n_0$; für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt demnach

$$e^x + n \leq n_0 + n \leq 2\,n, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{e^x + n} \geq \frac{1}{2\,n}.$$

Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{e^x + n}$ die (als harmonische Reihe) divergente Minorante $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2\,n}$ und ist folglich nach dem Minorantenkriterium selbst divergent; somit divergiert aber auch die gegebene Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^x + n}$.

50. • Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ ergibt sich aus

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{insbesondere} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

so daß die Folge $\left(n \sin \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, mithin auch beschränkt ist; es gibt also ein $M > 0$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ zunächst $\left|n \sin \frac{1}{n}\right| \leq M$ und dann

$$\left| \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{1}{n^2} \cdot n \sin \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n^2} \cdot \underbrace{\left| n \sin \frac{1}{n} \right|}_{\leq M} \leq \frac{M}{n^2}$$

gilt. Damit besitzt die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$ die konvergente Majorante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2}$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

• Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$; da der Cosinus auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton fallend ist, folgt daraus $1 = \cos 0 > \cos \frac{1}{n} \geq \cos 1 > \cos \frac{\pi}{2} = 0$ und damit

$$\frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} \cos 1.$$

Mit der harmonischen Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 1}{n}$ divergent; damit besitzt die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$ die divergente Minorante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 1}{n}$ und ist folglich nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

• Man betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \tan \frac{1}{n}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt zunächst $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq 1$; da der Tangens auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ monoton wachsend ist, folgt daraus

$$a_{n+1} = \tan \frac{1}{n+1} \leq \tan \frac{1}{n} = a_n$$

weswegen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Ferner gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, wodurch sich wegen der Stetigkeit von tan (im Punkte $a = 0$)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \tan \frac{1}{n} = \tan 0 = 0$$

ergibt; damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Somit konvergiert die alternierende Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \tan \frac{1}{n}$ nach den Leibnizschen Konvergenzkriterium.

51. a) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \ln x)^n$ besitzt die Gestalt der geometrischen Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = 1 - \ln x$. Diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ gilt, wegen

$$|1 - \ln x| < 1 \iff -1 < 1 - \ln x < 1 \iff$$
$$\iff -2 < -\ln x < 0 \iff 0 < \ln x < 2 \iff 1 < x < e^2$$

also genau für $x \in \,]1, e^2[$, und in diesem Fall gilt für die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \ln x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(1-\ln x)} = \frac{1}{\ln x}.$$

b) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{(\tan x)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(\tan x)^n}{n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{|\tan x|^n}{n}} = \frac{|\tan x|}{\sqrt[n]{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\tan x|$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium

- für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mit $|\tan x| < 1$ (absolut) konvergent, wegen

$$|\tan x| < 1 \iff -1 < \tan x < 1 \iff -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

  also für $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, sowie
- für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mit $|\tan x| > 1$ divergent, wegen

$$|\tan x| > 1 \iff \tan x < -1 \text{ oder } 1 < \tan x \iff$$
$$\iff -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4} \text{ oder } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$

  also für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Es sind noch die Fälle $x = \pm\frac{\pi}{4}$ zu untersuchen:

- Für $x = \frac{\pi}{4}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\tan \frac{\pi}{4}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

  als harmonische Reihe divergent, und
- für $x = -\frac{\pi}{4}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

  als alternierende harmonische Reihe konvergent.

Insgesamt konvergiert also die gegebene Reihe genau für alle $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

52. a)
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - (-x)^n}{2 \cdot n!};$$

dabei gilt

$$\frac{x^n - (-x)^n}{2 \cdot n!} = \frac{x^n + (-1)^{n+1} \cdot x^n}{2 \cdot n!} = \begin{cases} \frac{x^n - x^n}{2 \cdot n!} = 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{x^n + x^n}{2 \cdot n!} = \frac{x^n}{n!}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit erhält man schließlich die Reihendarstellung

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{2 \cdot n!};$$

dabei gilt

$$\frac{x^n + (-x)^n}{2 \cdot n!} = \frac{x^n + (-1)^n \cdot x^n}{2 \cdot n!} = \begin{cases} \frac{x^n + x^n}{2 \cdot n!} = \frac{x^n}{n!}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{x^n - x^n}{2 \cdot n!} = 0, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit erhält man schließlich die Reihendarstellung

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Wir vergleichen nun die Reihendarstellungen von sin und sinh bzw. cos und cosh. Es ist zum einen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

und

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

sowie zum anderen

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

und

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

Damit unterscheiden sich sin und sinh bzw. cos und cosh lediglich hinsichtich des alternierenden Vorzeichens in den Reihendarstellungen: mit

$$a_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{und} \qquad b_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

ist

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \qquad \text{und} \qquad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

bzw.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n \qquad \text{und} \qquad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

b) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $a_n = (-1)^n \dfrac{x^n}{(2n)!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Im Fall $x = 0$ gilt $a_0 = 1$ sowie $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; insbesondere ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Im Fall $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und es gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(-1)^n\, x^n} \right| = \frac{|x|}{(2n+1)\,(2n+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

damit ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{(2n)!}$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent.
Sei zunächst $x \geq 0$; in diesem Fall gilt also $x = \sqrt{x}^{\,2}$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ damit $x^n = \left(\sqrt{x}^{\,2}\right)^n = \sqrt{x}^{\,2n}$, woraus sich

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{x}^{\,2n}}{(2n)!} = \cos\sqrt{x}$$

ergibt. Sei nun $x < 0$, also $-x > 0$; in diesem Fall gilt also $-x = \sqrt{-x}^{\,2}$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ damit $(-x)^n = \left(\sqrt{-x}^{\,2}\right)^n = \sqrt{-x}^{\,2n}$, woraus sich

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{-x}^{\,2n}}{(2n)!} = \cosh\sqrt{-x}$$

ergibt.