MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 12
18.01.2016

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

45. a) Für $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^a.$$

Gemäß der Definition der allgemeinen Potenz erhalten wir

$$f(x) = x^a = \exp(a \cdot \ln x) = e^{a \cdot \ln x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Die Logarithmusfunktion

$$f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a \cdot \ln x$$

und die Exponentialfunktion

$$f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x$$

sind stetig und damit auch die Komposition

$$f = f_2 \circ f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{a \cdot \ln x}.$$

Die Funktionen $\exp : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sind stetig und streng monoton wachsend; wir treffen nun hinsichtlich $a \in \mathbb{R}$ folgende Fallunterscheidung:

- Sei $a > 0$. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$x_1 < x_2 \implies \ln x_1 < \ln x_2 \implies a \cdot \ln x_1 < a \cdot \ln x_2 \implies$$
$$\implies e^{a \cdot \ln x_1} < e^{a \cdot \ln x_2} \implies f(x_1) < f(x_2);$$

damit ist f streng monoton wachsend.

- Sei $a < 0$. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$x_1 < x_2 \implies \ln x_1 < \ln x_2 \implies a \cdot \ln x_1 > a \cdot \ln x_2 \implies$$
$$\implies e^{a \cdot \ln x_1} > e^{a \cdot \ln x_2} \implies f(x_1) > f(x_2);$$

damit ist f streng monoton fallend.

b) Zunächst ist die allgemeine Exponentialfunktion

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x = \exp(x\,\ln a),$$

als Verknüpfung der (stetigen) Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und der (ebenfalls stetigen) linearen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x\,\ln a$, selbst stetig. Wir treffen nun die folgende Fallunterscheidung:

- Fall 1: $a > 1$, also $\ln a > 0$. Für alle $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt dann $x_1\,\ln a < x_2\,\ln a$ sowie

  $$\exp_a(x_1) = \exp(x_1\,\ln a) < \exp(x_2\,\ln a) = \exp_a(x_2);$$

  damit ist $\exp_a$ streng monoton wachsend. Wegen

  $$\exp_a(x) = \exp(x\,\ln a) > 0$$

  für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $W_{\exp_a} \subseteq \mathbb{R}^+$; für „$\supseteq$" sei nun $y \in \mathbb{R}^+$. Wegen

  $$\lim_{x\to-\infty} \exp_a(x) = \lim_{x\to-\infty} \exp\big(\underbrace{x\,\ln a}_{\to-\infty}\big) = 0$$

  gibt es ein $b < 0$ mit $\exp_a(b) < y$, und wegen

  $$\lim_{x\to\infty} \exp_a(x) = \lim_{x\to\infty} \exp\big(\underbrace{x\,\ln a}_{\to\infty}\big) = \infty$$

  gibt es ein $c > 0$ mit $\exp_a(c) > y$, so daß nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [b;c]$ mit $\exp_a(\xi) = y$ existiert; folglich ist $W_{\exp_a} = \mathbb{R}^+$.
- Fall 2: $a = 1$, also $\ln a = 0$. Wegen

  $$\exp_1(x) = \exp(x\,\ln 1) = \exp(x \cdot 0) = \exp(0) = 1$$

  für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp_1$ eine konstante Funktion, insbesondere also sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend; ferner ist $W_{\exp_1} = \{1\}$.
- Fall 3: $a < 1$, also $\ln a < 0$. Für alle $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt dann $x_1\,\ln a > x_2\,\ln a$ sowie

  $$\exp_a(x_1) = \exp(x_1\,\ln a) > \exp(x_2\,\ln a) = \exp_a(x_2);$$

  damit ist $\exp_a$ streng monoton fallend. Wegen

  $$\exp_a(x) = \exp(x\,\ln a) > 0$$

  für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $W_{\exp_a} \subseteq \mathbb{R}^+$; für „$\supseteq$" sei nun $y \in \mathbb{R}^+$. Wegen

  $$\lim_{x\to-\infty} \exp_a(x) = \lim_{x\to-\infty} \exp\big(\underbrace{x\,\ln a}_{\to\infty}\big) = \infty$$

  gibt es ein $b < 0$ mit $\exp_a(b) > y$, und wegen

  $$\lim_{x\to\infty} \exp_a(x) = \lim_{x\to\infty} \exp\big(\underbrace{x\,\ln a}_{\to-\infty}\big) = 0$$

  gibt es ein $c > 0$ mit $\exp_a(c) < y$, so daß nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [b;c]$ mit $\exp_a(\xi) = y$ existiert; folglich ist $W_{\exp_a} = \mathbb{R}^+$.

46. Für $a,\, b \in \,]0,1[$ ist die Gleichung

$$(*) \qquad a^x + b^x = 1$$

zu betrachten; für alle $x \in \,]0,\infty[$ gilt

$$a^x + b^x = 1 \iff a^x + b^x - 1 = 0,$$

so daß die Lösungen der Gleichung $(*)$ mit den Nullstellen der Funktion

$$f : \,]0,\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x + b^x - 1,$$

übereinstimmen.

Wegen $a,\, b \in \,]0,1[$ fallen die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ und $x \mapsto b^x$ streng monoton; damit ist auch f streng monoton fallend, besitzt also insbesondere höchstens eine Nullstelle.

Ferner ist f als Summe zweier Exponentialfunktionen und einer konstanten Funktion stetig, und wegen $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$ gilt

$$f(x) = \underbrace{a^x}_{\to a^0 = 1} + \underbrace{b^x}_{\to b^0 = 1} - 1 \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} 1$$

und

$$f(x) = \underbrace{a^x}_{\to 0} + \underbrace{b^x}_{\to 0} - 1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -1;$$

damit gibt es ein $\alpha < 1$ mit $f(\alpha) > 0$ und ein $\beta > 1$ mit $f(\beta) < 0$, so daß f nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle in $]\alpha, \beta[\, \subseteq \,]0,\infty[$ besitzt.

Damit hat f genau eine Nullstelle, so daß die Gleichung $(*)$ eine eindeutig bestimmte Lösung in $]0,\infty[$ besitzt.

47. a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sinh(-x) = \tfrac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{x}\right) = -\tfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\sinh x$$

sowie

$$\cosh(-x) = \tfrac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{-(-x)}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{x}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \cosh x;$$

damit ist sinh eine ungerade sowie cosh eine gerade Funktion, d.h. $G_{\sinh}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. $G_{\cosh}$ ist achsensymmetrisch zur y–Achse. Wegen

$$\sinh x = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff x = 0$$

besitzt sinh genau eine Nullstelle, nämlich $x = 0$; für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt ferner $e^x > 0$ und $e^{-x} > 0$ und damit $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) > 0$, insbesondere ist demnach cosh ohne Nullstellen.

Zunächst sind Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$, sowie die lineare Funktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = -x$, stetig. Damit ist auch die Verknüpfung $f_2 = \exp \circ f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = e^{-x}$, sowie die Differenz bzw. Summe $f_3 = \exp - f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = e^x - e^{-x}$, bzw. $f_4 = \exp + f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = e^x + e^{-x}$, stetig, woraus schließlich die Stetigkeit von $\sinh = \frac{1}{2} \cdot f_3$ und $\cosh = \frac{1}{2} \cdot f_4$ folgt.

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ erhält man

$$\lim_{x\to\infty} \sinh x = \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \infty$$

sowie

$$\lim_{x\to\infty} \cosh x = \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \infty,$$

und wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$ erhält man

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = \lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = -\infty$$

sowie

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh x = \lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \infty.$$

Die Grenzwerte für $x \to -\infty$ lassen sich natürlich auch aus den entsprechenden Grenzwerten für $x \to \infty$ unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften herleiten.

b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y = \\
&\qquad = \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \cdot \tfrac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right) + \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \cdot \tfrac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right) = \\
&\qquad = \tfrac{1}{4}\left(e^x\, e^y + e^x\, e^{-y} - e^{-x}\, e^y - e^{-x}\, e^{-y}\right) + \\
&\qquad\quad + \tfrac{1}{4}\left(e^x\, e^y - e^x\, e^{-y} + e^{-x}\, e^y - e^{-x}\, e^{-y}\right) = \\
&\qquad = \tfrac{1}{2}\left(e^x\, e^y - e^{-x}\, e^{-y}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{x+y} - e^{-(x+y)}\right) = \sinh(x+y)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y = \\
&\qquad = \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \cdot \tfrac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right) + \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \cdot \tfrac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right) = \\
&\qquad = \tfrac{1}{4}\left(e^x\, e^y + e^x\, e^{-y} + e^{-x}\, e^y + e^{-x}\, e^{-y}\right) + \\
&\qquad\quad + \tfrac{1}{4}\left(e^x\, e^y - e^x\, e^{-y} - e^{-x}\, e^y + e^{-x}\, e^{-y}\right) = \\
&\qquad = \tfrac{1}{2}\left(e^x\, e^y + e^{-x}\, e^{-y}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{x+y} + e^{-(x+y)}\right) = \cosh(x+y).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
1 = \cosh 0 = \cosh(x + (-x)) &= \cosh x \cdot \cosh(-x) + \sinh x \cdot \sinh(-x) = \\
&= \cosh x \cdot \cosh x + \sinh x \cdot (-\sinh x) = \cosh^2 x - \sinh^2 x.
\end{aligned}$$

c) Wir zeigen zunächst $W_{\sinh} = \mathbb{R}$; sei dazu $y \in \mathbb{R}$. Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \sinh x = \infty$ gibt es ein $b > 0$ mit $f(b) > y$, und wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$ gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) < y$; wegen der Stetigkeit von sinh existiert also nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a; b]$ mit $\sinh \xi = y$. Folglich gilt also $W_{\sinh} = \mathbb{R}$.
Wir zeigen nun $W_{\cosh} = [1; \infty[$ durch den Nachweis von zwei Inklusionen:
„$\subseteq$": Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x \geq 1$ und damit, da die Funktion cosh nur positive Werte annimmt, bereits $\cosh x \geq 1$; folglich ist $W_{\cosh} \subseteq [1; \infty[$.
„$\supseteq$": Für alle $y \in [1; \infty[$ gilt $\cosh 0 = 1 \leq y$, und wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \cosh x = \infty$ gibt es ein $b > 0$ mit $\cosh b > y$; wegen der Stetigkeit von cosh existiert also nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [0; b]$ mit $f(\xi) = y$. Folglich ist $y \in W_{\cosh}$, und es gilt auch $W_{\cosh} \supseteq [1; \infty[$.

48. a) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$, also $-x_2 < -x_1$; da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, folgt damit $e^{x_1} < e^{x_2}$ und $e^{-x_2} < e^{-x_1}$, also $-e^{-x_1} < -e^{-x_2}$, woraus sich $e^{x_1} - e^{-x_1} < e^{x_2} - e^{-x_2}$ und schließlich $\sinh x_1 = \frac{1}{2}\left(e^{x_1} - e^{-x_1}\right) < \frac{1}{2}\left(e^{x_2} - e^{-x_2}\right) = \sinh x_2$ ergibt. Damit ist sinh streng monoton wachsend. Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sinh x = y &\iff \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = y \iff e^x - e^{-x} = 2\,y \iff \\
&\iff e^x - 2\,y = e^{-x} \iff \left(e^x\right)^2 - 2\,y\,e^x = 1 \iff \\
&\iff \left(e^x\right)^2 - 2\,y\,e^x + y^2 = y^2 + 1 \iff \left(e^x - y\right)^2 = y^2 + 1 \iff \\
&\iff e^x - y = \pm\sqrt{y^2+1} \iff e^x = y \pm \sqrt{y^2+1} \underset{e^x>0}{\iff} \\
&\iff e^x = y + \sqrt{y^2+1} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\operatorname{Arsinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

b) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ mit $x_1 < x_2$; wegen a) gilt $0 = \sinh 0 \leq \sinh x_1 < \sinh x_2$, also $\sinh^2 x_1 < \sinh^2 x_2$, woraus sich

$$\cosh^2 x_1 = 1 + \sinh^2 x_1 < 1 + \sinh^2 x_2 = \cosh^2 x_2$$

und damit, da cosh nur positive Werte annimmt, schon $\cosh x_1 < \cosh x_2$ ergibt. Damit ist $\cosh|_{\mathbb{R}_0^+}$ streng monoton wachsend. Die Argumentation von Aufgabe 43 c) zeigt, daß die Wertemenge der Einschränkung mit der Wertemenge $W_{\cosh} = [1; \infty[$ übereinstimmt.
Für alle $y \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\cosh x = y &\iff \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = y \iff e^x + e^{-x} = 2\,y \iff \\
&\iff e^x - 2\,y = -e^{-x} \iff \left(e^x\right)^2 - 2\,y\,e^x = -1 \iff \\
&\iff \left(e^x\right)^2 - 2\,y\,e^x + y^2 = y^2 - 1 \iff \left(e^x - y\right)^2 = y^2 - 1 \iff \\
&\iff e^x - y = \pm\sqrt{y^2-1} \iff e^x = y \pm \sqrt{y^2-1},
\end{aligned}$$

wobei $y+\sqrt{y^2-1} \geq y \geq 1$ sowie $0 < y-\sqrt{y^2-1} = \dfrac{1}{y+\sqrt{y^2-1}} \leq 1$ gilt; wegen $x \geq 0$ ist $e^x \geq 1$, und damit erhält man

$$e^x = y+\sqrt{y^2-1}, \qquad \text{also} \quad x = \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right).$$

Damit gilt

$$\operatorname{Arcosh} : [1;\infty[\to \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arcosh} y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

c) Für die Graphen von sinh und cosh sowie von Arsinh und Arcosh ergibt sich: