MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 11
11.01.2016

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I" — Lösungsvorschlag —

41. a) Als Polynomfunktion ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$, insbesondere stetig, und wegen
$$f(-1) = (-1)^3 + (-1) + 1 = -1 < 0$$
sowie
$$f(0) = 0^3 + 0 + 1 = 1 > 0$$
existiert nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in \,]-1, 0[$ mit $f(\xi) = 0$; demnach besitzt f im Intervall $]-1, 0[$ der Intervallänge 1 eine Nullstelle.
Für eine beliebige Nullstelle $\zeta \in \mathbb{R}$ von f gilt nun $\xi^3 + \xi + 1 = \zeta^3 + \zeta + 1$ und damit
$$\begin{aligned} 0 &= \left(\xi^3 + \xi + 1\right) - \left(\zeta^3 + \zeta + 1\right) = \left(\xi^3 - \zeta^3\right) + (\xi - \zeta) = \\ &= (\xi - \zeta)\left(\xi^2 + \xi\,\zeta + \zeta^2\right) + (\xi - \zeta) = (\xi - \zeta)\left(\left(\xi + \tfrac{1}{2}\,\zeta\right)^2 + \tfrac{3}{4}\,\zeta^2 + 1\right); \end{aligned}$$
wegen $\left(\xi + \frac{1}{2}\,\zeta\right)^2 + \frac{3}{4}\,\zeta^2 + 1 \geq 1$ folgt $\xi - \zeta = 0$, also $\xi = \zeta$. Damit besitzt f genau eine Nullstelle.

b) Nach dem Nullstellensatz muß die Nullstelle ξ wegen
$$f(-\tfrac{1}{2}) = (-\tfrac{1}{2})^3 - \tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{3}{8} > 0$$
zunächst im Intervall $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$ der Intervallänge $\frac{1}{2}$, wegen
$$f(-\tfrac{3}{4}) = (-\tfrac{3}{4})^3 - \tfrac{3}{4} + 1 = -\tfrac{11}{64} < 0$$
dann im Intervall $\left]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right[$ der Intervallänge $\frac{1}{4}$ und wegen
$$f(-\tfrac{5}{8}) = (-\tfrac{5}{8})^3 - \tfrac{5}{8} + 1 = \tfrac{67}{512} > 0$$
schließlich im Intervall $\left]-\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}\right[$ der Intervallänge $\frac{1}{8}$ liegen.

42. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ betrachten wir die Funktion
$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n - n\,x + 1.$$

a) Die Funktion

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n - n\,x + 1.$$

ist als Polynomfunktion stetig und besitzt wegen

$$f_n(0) = 1 > 0 \qquad \text{und} \qquad f_n(1) = 1 - n + 1 = 2 - n \underset{n\geq 3}{<} 0$$

nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi_n \in \,]0,1[$. Für eine beliebige Nullstelle $\zeta_n \in \,]0,1[$ gilt

$$\xi_n^n - n\,\xi_n + 1 = 0 = \zeta_n^n - n\,\zeta_n + 1, \quad \text{also} \quad \xi_n^n - \zeta_n^n = n\,\xi_n - n\,\zeta_n,$$

woraus sich

$$(\xi_n - \zeta_n) \cdot \left(\xi_n^{n-1} + \xi_n^{n-2} \cdot \zeta_n + \ldots + \xi_n \cdot \zeta_n^{n-2} + \zeta_n^{n-1}\right) = n \cdot (\xi_n - \zeta_n)$$

und damit

$$(\xi_n - \zeta_n) \cdot \left(\overbrace{\underbrace{\xi_n^{n-1}}_{<1} + \underbrace{\xi_n^{n-2} \cdot \zeta_n}_{<1} + \ldots + \underbrace{\xi_n \cdot \zeta_n^{n-2}}_{<1} + \underbrace{\zeta_n^{n-1}}_{<1}}^{n \text{ Summanden}} - n \right) = 0$$

ergibt. Da nun der zweite Faktor $\xi_n^{n-1} + \xi_n^{n-2} \cdot \zeta_n + \ldots + \xi_n \cdot \zeta_n^{n-2} + \zeta_n^{n-1} - n$ des Produkts stets kleiner Null, folgt schon $\xi_n - \zeta_n = 0$ bzw. $\xi_n = \zeta_n$. Folglich gibt es genau eine Nullstelle $\xi_n \in \,]0,1[$.

b) Wegen

$$f_n(0) = 1 > 0 \quad \text{und} \quad f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^n - n \cdot \frac{2}{n} + 1 = \underbrace{\left(\frac{2}{n}\right)^n}_{<1} - 1 < 0$$

besitzt die stetige Funktion f_n nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $\left]0, \frac{2}{n}\right[$; da ξ_n gemäß a) die einzige Nullstelle von f_n sogar im größeren Intervall $]0,1[$ ist, folgt $\xi_n \in \left]0, \frac{2}{n}\right[$. Wegen

$$0 \leq \xi_n \leq \frac{2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ergibt sich mit Hilfe des Schrankenlemmas dann $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

43. a) Im Falle $f(0) = f(a)$ kann $\xi = a$ gewählt werden; sei also im folgenden $f(0) \neq f(a)$. Wir betrachten die Funktion

$$g : [0,a] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - f(x-a).$$

Da

$$f_1 : [0,a] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x - a,$$

als lineare Funktion stetig ist, ist wegen der Stetigkeit von f auch

$$f_2 = f \circ f_1 : [0,a] \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = f(f_1(x)) = f(x-a),$$

stetig, und damit ergibt sich die Stetigkeit von

$$g = f|_{[0,a]} - f_2 : [0,a] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - f_2(x) = f(x) - f(x-a);$$

darüber hinaus gilt

$$g(0) \cdot g(a) = (f(0) - f(-a))\,(f(a) - f(0)) = -\,(f(a) - f(0))^2 < 0.$$

Nach dem Nullstellensatz existiert also ein $\xi \in [0,a]$ mit $g(\xi) = 0$; damit gilt aber $f(\xi) = f(\xi - a)$.

b) Die Funktion $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - a^2)\,(x + 2a)$ ist (als Polynomfunktion) stetig, und es gilt $f(-a) = 0 = f(a)$. Für $\xi \in [0,a]$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\xi) = f(\xi - a) \quad &\Longleftrightarrow \quad (\xi^2 - a^2)(\xi + 2\,a) = \big((\xi - a)^2 - a^2\big)\,((\xi - a) + 2\,a) \\ &\Longleftrightarrow \quad (\xi - a)\,(\xi + a)\,(\xi + 2\,a) = (\xi^2 - 2\,\xi\,a)\,(\xi + a) \\ &\underset{\xi + a > 0}{\Longleftrightarrow} \quad (\xi - a)\,(\xi + 2\,a) = \xi^2 - 2\,\xi\,a \\ &\Longleftrightarrow \quad \xi^2 + a\,\xi - 2\,a^2 = \xi^2 - 2\,\xi\,a \\ &\Longleftrightarrow \quad 3\,\xi\,a = 2\,a^2 \underset{a>0}{\Longleftrightarrow} \xi = \tfrac{2}{3}\,a \end{aligned}$$

44. Die beiden auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1,1]$ definierten und als stetig vorausgesetzten Funktionen $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ und $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ besitzen nach dem Satz von Weierstraß jeweils ein globales Maximum, es gibt also p, $q \in [-1,1]$ mit $f(x) \leq f(p)$ und $g(x) \leq g(q)$ für alle $x \in [-1,1]$; damit gilt

$$f(p) = \sup\{f(x) \mid -1 \leq x \leq 1\} = \sup\{g(x) \mid -1 \leq x \leq 1\} = g(q).$$

Für $p = q$ wählen wir $\xi = p \in [-1,1]$, und es gilt $f(\xi) = f(p) = g(q) = g(\xi)$. Für $p \neq q$ können wir (aufgrund der bezüglich f und g symmetrischen Problemstellung) schon $p < q$ annehmen und betrachten die Hilfsfunktion

$$h : [p,q] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

Damit ist h als Differenz der stetigen Funktionen f und g selbst stetig mit

$$\begin{aligned} h(p) = f(p) - g(p) \quad &\underset{g(p) \leq g(q)}{\geq} \quad f(p) - g(q) = 0, \\ h(q) = f(q) - g(q) \quad &\underset{f(q) \leq f(p)}{\leq} \quad f(p) - g(q) = 0, \end{aligned}$$

und nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in [p,q] \subseteq [-1,1]$ mit $h(\xi) = 0$, also $f(\xi) = g(\xi)$.