MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 10
21.12.2015

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

37. Für die reellen Parameter λ, $\mu \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda \sqrt{x^2+8} + \mu, & \text{für } x < -1, \\ (x-\lambda)\,(x-\mu), & \text{für } -1 \le x \le 1, \\ \lambda\,|x-2| + \mu & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

zu betrachten.

a) Wir treffen die folgende Fallunterscheidung bezüglich $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$:

- Fall 1: $a < -1$: Die Polynomfunktion

$$f_1 : \left]-\infty, -1\right[\to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x^2 + 8,$$

und die lineare Funktion

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \lambda\, x + \mu,$$

sowie die Wurzelfunktion

$$f_3 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sqrt{x},$$

sind stetig; damit ist auch die Komposition

$$f_4 = f_3 \circ f_1 : \left]-\infty, -1\right[\to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = f_3(f_1(x)) = \sqrt{x^2+8},$$

stetig. Demnach ist auch die Einschränkung

$$f|_{]-\infty,-1[} = f_2 \circ f_4 : \left]-\infty; -1\right[\to \mathbb{R},$$
$$f|_{]-\infty,-1[}(x) = f_2(f_4(x)) = \lambda \sqrt{x^2+8} + \mu,$$

von f auf das Intervall $\left]-\infty, -1\right[$ stetig; folglich ist f in a stetig.

- Fall 2: $-1 < a < 1$: Die Einschränkung $f|_{[-1,1]}$ von f auf das Intervall $[-1, 1]$ ist wegen

$$f(x) = x^2 - (\lambda + \mu)\,x + \lambda\,\mu$$

für alle $x \in [-1; 1]$ eine quadratische Funktion und damit insbesondere stetig; folglich ist f in allen Punkten $a \in \left]-1, 1\right[$ stetig.

- Fall 3: $1 < a$: Die linearen Funktionen

  $$f_5 : \,]1, \infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f_5(x) = x - 2,$$

  und

  $$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = \lambda\, x + \mu,$$

  sowie die Betragsfunktion

  $$f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_6(x) = |x|,$$

  sind stetig; damit ist auch die Komposition

  $$f_7 = f_6 \circ f_5 : \,]1, \infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f_7(x) = f_6(f_5(x)) = |x - 2|,$$

  stetig. Demnach ist auch die Einschränkung

  $$f|_{]1,\infty[} = f_2 \circ f_7 : \,]1; \infty[\, \to \mathbb{R}, \qquad f|_{]1,\infty[}(x) = f_2(f_7(x)) = \lambda\, |x - 2| + \mu,$$

  von f stetig; folglich ist f in a stetig.

b) Wegen

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} ((x - \lambda)\,(x - \mu)) = (-1 - \lambda)\,(-1 - \mu) = f(-1)$$

und (wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion)

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1-} \left(\lambda \sqrt{x^2 + 8} + \mu\right) = \lambda \sqrt{(-1)^2 + 8} + \mu = 3\lambda + \mu;$$

damit ist f im Punkt $a = -1$ genau dann stetig, wenn

$$(1 + \lambda)\,(1 + \mu) = 3\,\lambda + \mu$$

gilt; wegen $(1 + \lambda)\,(1 + \mu) = 1 + \lambda + \mu + \lambda\mu$ ist dies aber zu $1 + \lambda\mu = 2\lambda$ äquivalent. Wegen

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} ((x - \lambda)\,(x - \mu)) = (1 - \lambda)\,(1 - \mu) = f(1)$$

und (wegen der Stetigkeit der Betragsfunktion)

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} (\lambda\,|x - 2| + \mu) = \lambda\,|1 - 2| + \mu = \lambda + \mu$$

damit ist f im Punkt $a = 1$ genau dann stetig, wenn

$$(1 - \lambda)\,(1 - \mu) = \lambda + \mu$$

gilt; wegen $(1 - \lambda)\,(1 - \mu) = 1 - \lambda - \mu + \lambda\mu$ ist dies aber zu $1 + \lambda\mu = 2\lambda + 2\mu$ äquivalent. Die Funktion f ist also genau dann stetig, wenn

$$1 + \lambda\,\mu = 2\lambda \qquad \text{und} \qquad 1 + \lambda\,\mu = 2\lambda + 2\mu$$

gilt. Aus beiden Gleichungen zusammen folgt

$$2\lambda = 1 + \lambda\mu = 2\lambda + 2\mu,$$

also $\mu = 0$ und $\lambda = \frac{1}{2}$; umgekehrt erfüllt das Paar $(\lambda, \mu) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ beide Gleichungen.

Die also genau im Falle $(\lambda, \mu) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ stetige Funktion lautet

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+8}, & \text{für } x < -1, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot x, & \text{für } -1 \le x \le 1, \\ \frac{1}{2}\,|x-2|, & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

38. Wir zeigen, daß die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < \sqrt{2}, \\ 1, & \text{für } x > \sqrt{2}, \end{cases}$$

in allen Punkten $a \in \mathbb{Q}$ stetig ist, mit Hilfe der folgenden Fallunterscheidung:

- Sei $a < \sqrt{2}$; bei $x \to a$ ist schließlich auch $x < \sqrt{2}$ und damit

$$f(x) = 0 \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 = f(a).$$

- Sei $a > \sqrt{2}$; bei $x \to a$ ist schließlich $x > \sqrt{2}$ und damit

$$f(x) = 1 \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1 = f(a).$$

39. Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \qquad \text{für alle} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R};$$

damit ist f eine additive Abbildung im Sinne der linearen Algebra.

a) Für die spezielle Wahl von $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ ergibt sich

$$f(0) = f(0+0) \underset{(*)}{=} f(0) + f(0), \quad \text{also} \quad f(0) = 0;$$

ferner wählen wir für $x \in \mathbb{R}$ speziell $x_1 = x$ und $x_2 = -x$ und erhalten

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) \underset{(*)}{=} f(x) + f(-x), \quad \text{also} \quad f(-x) = -f(x).$$

b) Sei $r \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl; wir zeigen die Aussage

$$f(r \cdot n) = f(r) \cdot n \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

mit Hilfe vollständiger Induktion:

- Für „$n = 0$“ gilt

$$f(r \cdot 0) = f(0) \underset{\text{a)}}{=} 0 = f(r) \cdot 0.$$

- Für „$n \to n+1$“ gilt

$$f(r \cdot (n+1)) = f(r \cdot n + r) \underset{(*)}{=} f(r \cdot n) + f(r) =$$

$$\underset{\text{voraussetzung}}{\overset{\text{Induktions-}}{=}} f(r) \cdot n + f(r) = f(r) \cdot (n+1).$$

Damit ergibt sich ferner auch

$$f(r \cdot (-n)) = f(-(r \cdot n)) \underset{\text{a)}}{=} -f(r \cdot n) = -(f(r) \cdot n) = f(r) \cdot (-n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und damit sogar

$$f(r \cdot z) = f(r) \cdot z \qquad \text{für alle} \quad r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad z \in \mathbb{Z}.$$

c) Jede rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ besitzt die Darstellung

$$q = \frac{z}{n} \qquad \text{mit geeigneten} \qquad z \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{N};$$

wegen

$$f(z) = f(1 \cdot z) \underset{\text{b)}}{=} f(1) \cdot z \qquad \text{und} \qquad f(z) = f(q \cdot n) \underset{\text{b)}}{=} f(q) \cdot n$$

ergibt sich zusammen

$$f(q) \cdot n = f(1) \cdot z \qquad \text{und damit} \qquad f(q) = f(1) \cdot \frac{z}{n} = f(1) \cdot q.$$

d) Sei nun f stetig im Punkt $a = 0$; zum Nachweis, daß dann f schon eine stetige Funktion ist, zeigen wir die Stetigkeit von f in allen Punkten $a' \in \mathbb{R}$. Für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a' \qquad \text{gilt} \qquad \lim_{n \to \infty} (x_n - a') = 0,$$

woraus mit der vorausgesetzten Stetigkeit von f im Punkt $a = 0$ schon

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n - a') = f(0) \underset{\text{a)}}{=} 0$$

folgt; damit ergibt sich aber

$$f(x_n) = f((x_n - a') + a') \underset{(*)}{=} \underbrace{f(x_n - a')}_{\to 0} + f(a') \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(a').$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es nun gemäß der Tutoriumsaufgabe 4 eine Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen $q_n \in \mathbb{Q}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} q_n = x$; mit der eben gezeigten Stetigkeit von f im Punkt $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(q_n) \underset{\text{c)}}{=} \lim_{n \to \infty} (f(1) \cdot q_n) = f(1) \cdot \lim_{n \to \infty} q_n = f(1) \cdot x.$$

Damit ist f sogar eine lineare Abbildung im Sinne der linearen Algebra; aus der Additivität von f folgt (mit der Stetigkeit) die Homogenität von f.

40. a) Die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^2 - 2,$$

ist als quadratische Funktion insbesondere stetig; damit ist aber auch ihre Einschränkung f auf die Definitionsmenge $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$ und die Zielmenge $\mathbb{Q}$ stetig. Ferner gilt

$$f(0) = 0^2 - 2 = -2 < 0 \qquad \text{und} \qquad f(2) = 2^2 - 2 = 2 > 0.$$

Wegen

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

und der Irrationalität von $\sqrt{2}$ besitzt f in $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$ keine Nullstelle.

b) Der Nullstellensatz setzt eine stetige Funktion f auf einem reellen Intervall $[a, b]$ voraus da bei seinem Beweis auf die Vollständigkeit des Zahlbereichs $\mathbb{R}$ zurückgegriffen wird; die in a) betrachtete Funktion ist allerdings nur auf den rationalen Punkten des Intervalls $[0, 2]$ definiert.