Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

33. In Abhängigkeit vom Parameter $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{(2x)^n}{1+x^{2n}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten. Für $x = 0$ ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Für $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(2x)^{n+1}}{1+x^{2(n+1)}} \cdot \frac{1+x^{2n}}{(2x)^n}\right| = \left|\frac{(2x)^{n+1}}{(2x)^n} \cdot \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}\right| = 2\,|x| \cdot \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}},$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Fall 1: $0 < |x| < 1$. Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n+2} = 0$, woraus sich

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\,|x| \cdot \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\,|x| \cdot \frac{1+0}{1+0} = 2\,|x|$$

  ergibt; nach dem Quotientenkriterium ist also in diesem Fall die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

  - für $2\,|x| < 1$, also für $0 < |x| < \frac{1}{2}$, konvergent sowie
  - für $2\,|x| > 1$, also für $\frac{1}{2} < |x| < 1$, divergent.

  Für $2\,|x| = 1$, also für $|x| = \frac{1}{2}$, ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß

$$|a_n| = \left|\frac{(2\,x)^n}{1+x^{2n}}\right| = \frac{|2\,x|^n}{1+x^{2n}} = \frac{(2\,|x|)^n}{1+(x^2)^n} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+0} = 1$$

  keine Nullfolge und damit insbesondere die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

- Fall 2: $|x| = 1$. Damit ist $x^{2n} = 1$ sowie $x^{2n+2} = 1$ und folglich

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\,|x| \cdot \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1+1}{1+1} = 2$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$, weswegen die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium divergiert.

- Fall 3: $|x| > 1$. Damit ist $0 < \frac{1}{|x|} < 1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^{2n}} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{|x|}\right)^{2n} = 0$, woraus sich

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\,|x| \cdot \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}} = 2\,|x| \cdot \frac{x^{2n}\left(\frac{1}{x^{2n}}+1\right)}{x^{2n}\left(\frac{1}{x^{2n}}+x^2\right)} =$$

$$= 2\,|x| \cdot \frac{\frac{1}{x^{2n}}+1}{\frac{1}{x^{2n}}+x^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\,|x| \cdot \frac{0+1}{0+x^2} = 2\,|x| \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2\,|x|}{|x|^2} = \frac{2}{|x|}$$

ergibt; nach dem Quotientenkriterium ist also in diesem Fall die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

  - für $\frac{2}{|x|} < 1$, also für $2 < |x|$, konvergent sowie
  - für $\frac{2}{|x|} > 1$, also für $1 < |x| < 2$, divergent.

Für $\frac{2}{|x|} = 1$, also für $|x| = 2$, ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß

$$|a_n| = \left|\frac{(2\,x)^n}{1+x^{2n}}\right| = \frac{|2\,x|^n}{1+x^{2n}} = \frac{(2\,|x|)^n}{1+(x^2)^n} = \frac{4^n}{1+4^n} =$$

$$= \frac{4^n}{4^n\left(\frac{1}{4^n}+1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{4^n}+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{0+1} = 1$$

keine Nullfolge und damit insbesondere die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Insgesamt konvergiert die gegebene Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn

$$|x| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{oder} \qquad |x| > 2$$

ist, also genau für alle

$$x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right[\cup \left]2; +\infty\right[.$$

34. a) In Abhängigkeit von $k \in \mathbb{N}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten. Für die n–te Partialsumme mit $n > k$ gilt

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+k}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+k}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \\ &\qquad - \left(\frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+k}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+k}\right), \end{aligned}$$

und wegen

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n+k}}_{\to 0}}_{k \text{ Summanden}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k\cdot 0=0$$

wir erhalten den Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}.$$

b) Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen $a_n > 0$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ als konvergent vorausgesetzt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt nun

- im Falle $a_n \leq a_{n+1}$ wegen $a_{n+1} > 0$ nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation $a_n \cdot a_{n+1} \leq a_{n+1} \cdot a_{n+1} = a_{n+1}^2$, woraus wegen der Monotonie der Quadratwurzel $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq a_{n+1}$ und wegen $a_n \geq 0$ dann $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq a_n + a_{n+1}$ folgt;
- im Falle $a_{n+1} \leq a_n$ wegen $a_n > 0$ nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation $a_n \cdot a_{n+1} \leq a_n \cdot a_n = a_n^2$, woraus wegen der Monotonie der Quadratwurzel $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq a_n$ und wegen $a_{n+1} \geq 0$ dann $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq a_n + a_{n+1}$ folgt;

damit gilt stets $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq a_n + a_{n+1}$. Zu dieser Abschätzung gelangt man alternativ ohne Fallunterscheidung über

$$0 \leq \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}\right)^2 = \sqrt{a_n}^2 - 2\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_{n+1}}^2$$

und damit

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq 2\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}} \leq \sqrt{a_n}^2 + \sqrt{a_{n+1}}^2 = a_n + a_{n+1}.$$

Folglich besitzt die zu untersuchende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ die Majorante $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1})$; mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ und somit deren Summe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1})$ konvergent, so daß nach dem Majorantenkriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ konvergiert.

35. a) Eine gebrochenrationale Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners definiert; wegen $x^2 = 4 \iff x = \pm 2$ ist also $D = \mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$.

b) Für alle $x \in D \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)\,(x+2)} = \frac{x-2}{x+2} = \frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}};$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 1$$

und

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0$$

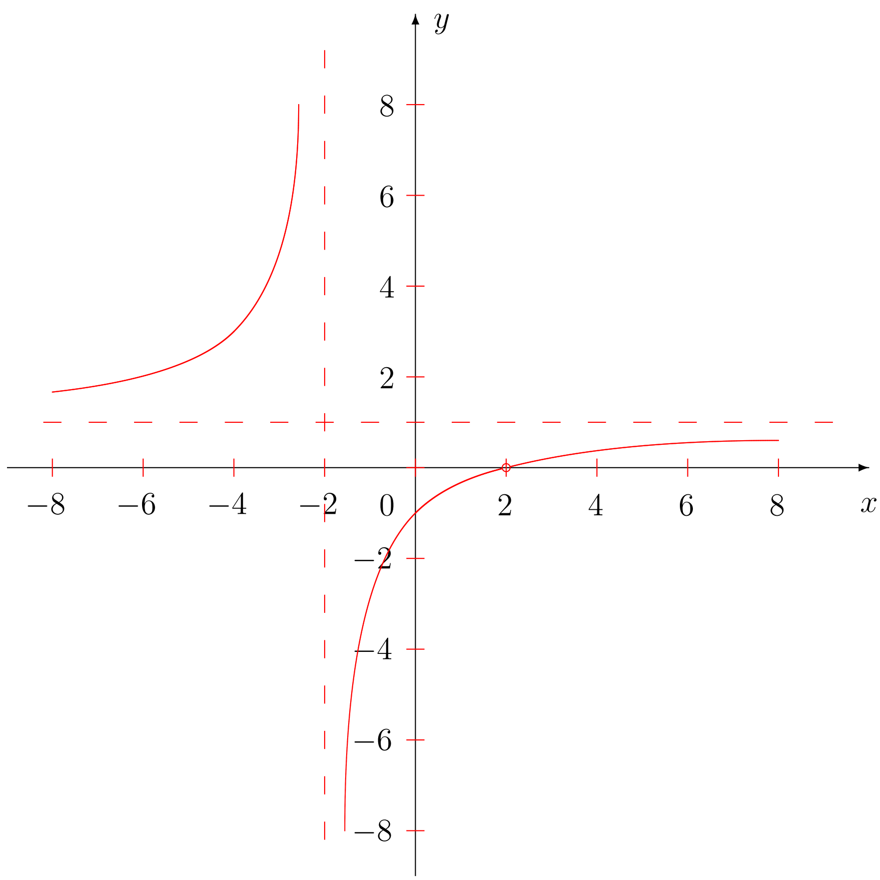
sowie

$$\lim_{x\to -2-} f(x) = \lim_{x\to -2-} \frac{x-2}{x+2} = \infty$$

und

$$\lim_{x\to -2+} f(x) = \lim_{x\to -2+} \frac{x-2}{x+2} = -\infty$$

c) f ist als gebrochenrationale Funktion in ihrem Definitionsgebiet D stetig; für ihren Graphen ergibt sich:



36. a) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} = \frac{1}{\frac{x}{|x|} \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{|x|}{x \cdot \sqrt{x^2+1}},$$

und damit erhält man

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{|x|}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} \underset{x>0}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

und

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} \underset{x>0}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

sowie

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} \underset{x<0}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

und

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} \underset{x<0}{=} \lim_{x \to 0-} \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} = -1.$$

b) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - |x|}{x}.$$

Für alle $x > 0$ ist

$$f(x) = \frac{x^2 - |x|}{x} = \frac{x^2 - x}{x} = \frac{x \cdot (x-1)}{x} = x - 1,$$

und damit erhält man

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x-1) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (x-1) = -1.$$

Für alle $x < 0$ ist

$$f(x) = \frac{x^2 - |x|}{x} = \frac{x^2 + x}{x} = \frac{x \cdot (x+1)}{x} = x + 1,$$

und damit erhält man

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (x+1) = 1.$$