MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 7
30.11.2015

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

25. a)
- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{1}{n+\sqrt[3]{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist wegen

$$a_n = \frac{1}{n+\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{(n+1)+\sqrt[3]{n+1}} = a_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ monoton fallend und wegen

$$0 \leq a_n = \frac{1}{n+\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

eine Nullfolge; damit konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt[3]{n}}$$

nach den Leibnizschen Konvergenzkriterium.

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist monoton fallend, und für den Grenzwert gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; damit konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

nach den Leibnizschen Konvergenzkriterium. Da aber die harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, ist damit auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \right)$$

divergent.

- Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ keine Nullfolge; damit ist aber die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{3}$ divergent.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist wegen

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} \geq \frac{1}{(n+1)^2+1} = a_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ monoton fallend und wegen

$$0 \leq a_n = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

eine Nullfolge; damit konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

nach den Leibnizschen Konvergenzkriterium. Es bezeichne s ihre Summe sowie $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ die n–te Partialsumme. Da die Teilfolge $(s_{2m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend und die Teilfolge $(s_{2m+1})_{m\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend ist, gilt

$$s_{2m+1} \leq s \leq s_{2m} \qquad \text{und} \qquad s_{2m+1} \leq s \leq s_{2m+2}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$; folglich liegt s stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen s_n und s_{n+1}, und es ergibt sich

$$|s - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = \left|(-1)^{n+1} a_{n+1}\right| = a_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen

$$a_{n+1} < \frac{1}{25} \iff \frac{1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{25} \iff (n+1)^2 + 1 > 25 \iff$$
$$\iff (n+1)^2 > 24 \iff (n+1)^2 \geq 25 \iff n+1 \geq 5 \iff n \geq 4$$

erhalten wir insgesamt

$$|s - s_4| \leq a_5 < \frac{1}{25},$$

so daß

$$s_4 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} = \frac{56}{85}$$

von der Summe s um weniger als $\frac{1}{25}$ abweicht.

26. Für alle $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $a_n = \dfrac{n}{(n+1)\,(n+2)} > 0$.

- Wegen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)}{(n+2)\,(n+3)} \cdot \frac{(n+1)\,(n+2)}{n} = \frac{(n+1)^2\,(n+2)}{n\,(n+2)\,(n+3)} =$$
$$= \frac{(n+1)^2}{n\,(n+3)} = \frac{n^2+2\,n+1}{n^2+3\,n} \leq \frac{n^2+2\,n+n}{n^2+3\,n} = \frac{n^2+3\,n}{n^2+3\,n} = 1$$

und damit $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

- Wegen
$$a_n = \frac{n}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})\,(1+\frac{2}{n})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0}{(1+0)\cdot(1+0)} = 0$$
ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Folglich ist nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium die alternierende Reihe $\sum_{n=1}(-1)^n\,a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n}{(n+1)\,(n+2)}$ konvergent.
Des weiteren gilt für alle $n \in \mathbb{N}$
$$|(-1)^n\,a_n| = a_n = \frac{n}{(n+1)\,(n+2)} \geq \frac{n}{(n+n)\,(n+2\,n)} = \frac{n}{2\,n\cdot 3\,n} = \frac{1}{6\,n}.$$
Mit der harmonischen Reihe ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6\,n}$ divergent; damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die divergente Minorante $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6\,n}$ und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent. Damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n}{(n+1)\,(n+2)}$ nicht absolut konvergent.

27. Wir betrachten die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \text{mit} \qquad b_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Wir bestimmen zunächst das Vorzeichen der Reihenglieder b_n für alle $n \in \mathbb{N}$: ist n gerade, so ergibt sich
$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{>0} > 0;$$
ist n ungerade, so ergibt sich
$$b_1 = \frac{1}{1} + \frac{(-1)^1}{\sqrt{1}} = 1 - 1 = 0$$
sowie
$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n} + \frac{-1}{\sqrt{n}} = \frac{\overbrace{1-\sqrt{n}}^{<0}}{\underbrace{n}_{>0}} < 0 \quad \text{für} \quad n \geq 3.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ erhalten wir demnach

$$\begin{aligned}
\overbrace{b_n}^{>0} \cdot \overbrace{b_{n+1}}^{<0} < 0 \quad & \text{für} \quad n \text{ gerade und damit } n+1 \text{ ungerade} \\
\underbrace{b_n}_{<0} \cdot \underbrace{b_{n+1}}_{>0} < 0 \quad & \text{für} \quad n \text{ ungerade und damit } n+1 \text{ gerade}
\end{aligned}$$

und damit stets $b_n \cdot b_{n+1} < 0$.

b) Bekanntlich gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Wegen

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{ist auch} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0,$$

und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0 + 0 = 0;$$

damit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

c) Nach Aufgabe 22a) von Tutorium 6 gilt: ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ konvergent, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c_n \pm d_n)$ divergent. Da die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert und die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergiert, divergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^{2n}}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

und damit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N}.$$

Dabei gilt zum einen gemäß a)

$$a_n = \frac{b_n}{(-1)^n} = \begin{cases} b_n > 0, & \text{für } n \text{ gerade,} \\ -b_n \geq 0, & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

also $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und zum anderen gemäß b)

$$|a_n| = \left| \frac{b_n}{(-1)^n} \right| = |b_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; dagegen ist die Voraussetzung des Leibnizschen Konvergenzkriteriums verletzt, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (zumindest ab einem Index $n_0 \in \mathbb{N}$) monoton fallend ist. Für alle geraden $n \in \mathbb{N}$ gilt zwar

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) - \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &= -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \underbrace{-\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right)}_{<0} + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}_{<0} < 0 \end{aligned}$$

und damit $a_{n+1} < a_n$, für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) - \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \underbrace{\sqrt{n+1}}_{\geq\sqrt{n}} \cdot \underbrace{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}_{\geq 1}} \leq \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

zusammen also

$$a_{n+1} - a_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right)}_{\geq 0} > 0$$

und damit $a_{n+1} > a_n$.

28. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ergibt sich mit Hilfe der 3. binomischen Formel

$$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} =$$

$$= \frac{1^2 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$$

sowie wegen der Monotonie der Quadratwurzel

$$1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \leq 1 + \sqrt{1 - 0} = 1 + \sqrt{1} = 2,$$

insgesamt also

$$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \geq \frac{\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2n}.$$

Damit besitzt die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)$ die (wie harmonische Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$) divergente Minorante $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n}$ und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ergibt sich mit Hilfe der 3. binomischen Formel

$$0 \leq 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \frac{1^2 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + 0} = \frac{1}{n^2}.$$

Damit besitzt die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)$ die konvergente Majorante $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.