Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

17. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{n+(-1)^n\cdot(3\,n+1)}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ ergibt sich

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{-4\,k+1}{2\,k-1} = \dfrac{-4+\frac{1}{k}}{2-\frac{1}{k}}, & \text{falls } n = 2\,k-1 \text{ ungerade,} \\ \dfrac{8\,k+1}{2\,k} = \dfrac{8+\frac{1}{k}}{2}, & \text{falls } n = 2\,k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Damit gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = -2$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 4$, so daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Häufungspunkte $b_1 = -2$ und $b_2 = 4$ besitzt.

Für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = (-1)^n + \cos\left(\frac{n\,\pi}{4}\right)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ ergibt sich

$$\cos\left(\frac{n\,\pi}{4}\right) = \begin{cases} \cos\left(\frac{8\,k\,\pi}{4}\right) = \cos(2\,k\,\pi) = 1, & \text{falls } n = 8\,k, \\ \cos\left(\frac{(8\,k-1)\,\pi}{4}\right) = \cos\left(2\,k\,\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{falls } n = 8\,k-1, \\ \cos\left(\frac{(8\,k-2)\,\pi}{4}\right) = \cos\left(2\,k\,\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0, & \text{falls } n = 8\,k-2, \\ \cos\left(\frac{(8\,k-3)\,\pi}{4}\right) = \cos\left(2\,k\,\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{falls } n = 8\,k-3, \\ \cos\left(\frac{(8\,k-4)\,\pi}{4}\right) = \cos(2\,k\,\pi - \pi) = -1, & \text{falls } n = 8\,k-4, \\ \cos\left(\frac{(8\,k-5)\,\pi}{4}\right) = \cos\left(2\,k\,\pi - \frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{falls } n = 8\,k-5, \\ \cos\left(\frac{(8\,k-6)\,\pi}{4}\right) = \cos\left(2\,k\,\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = 0, & \text{falls } n = 8\,k-6, \\ \cos\left(\frac{(8\,k-7)\,\pi}{4}\right) = \cos\left(2\,k\,\pi - \frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{falls } n = 8\,k-7. \end{cases}$$

Die Folge $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt die Häufungspunkte -1, 0 und 1 für die geraden $n\in\mathbb{N}$ bzw. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\frac{\sqrt{2}}{2}$ für die ungeraden $n\in\mathbb{N}$; damit besitzt die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Häufungspunkte 0, 1 und 2 für die geraden $n\in\mathbb{N}$ bzw. $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ für die ungeraden $n\in\mathbb{N}$, insgesamt also die Häufungspunkte

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 2, \quad c_4 = -1-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad c_5 = -1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Da durch die Betrachtung der Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_{8k})_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (b_{8k-7})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alle Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfaßt werden, gibt es somit genau die oben bestimmten (und keine weiteren) Häufungspunkte.

18. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen gebe es eine Konstante $q \in [0,1[$ mit der Eigenschaft $|a_{n+1} - a_n| \le q \cdot |a_n - a_{n-1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   a) Wir zeigen $|a_{n+1} - a_n| \le q^n \cdot |a_1 - a_0|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch vollständige Induktion:

   - Für „$n = 0$“ ist $|a_{0+1} - a_0| = |a_1 - a_0| \le q^0 \cdot |a_1 - a_0|$.
   - Für „$n \to n+1$“ folgt aus $|a_{n+1} - a_n| \le q^n \cdot |a_1 - a_0|$ schon

   $$|a_{n+2} - a_{n+1}| \le q \cdot |a_{n+1} - a_n| \le q \cdot (q^n \cdot |a_1 - a_0|) = q^{n+1} \cdot |a_1 - a_0|.$$

   b) Wir zeigen $|a_{n+k} - a_n| \le q^n \cdot \dfrac{|a_1 - a_0|}{1-q}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Es ist

   $$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &= |(a_{n+k} - a_{n+k-1}) + (a_{n+k-1} - a_{n+k-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)| \\
&\underset{(*)}{\le} |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + |a_{n+k-1} - a_{n+k-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\
&= \sum_{\ell=0}^{k-1} |a_{n+\ell+1} - a_{n+\ell}| \underset{(**)}{\le} \sum_{\ell=0}^{k-1} q^{n+\ell} \cdot |a_1 - a_0| \\
&\le q^n \cdot |a_1 - a_0| \cdot \sum_{\ell=0}^{k-1} q^\ell \underset{(***)}{=} q^n \cdot |a_1 - a_0| \cdot \frac{1-q^k}{1-q} \\
&\le q^n \cdot |a_1 - a_0| \cdot \frac{1}{1-q} = q^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1-q}.
\end{aligned}$$

   Dabei geht bei $(*)$ die Dreiecksungleichung, bei $(**)$ Teilaufgabe a) und bei $(***)$ die geometrische Summenformel ein.

   c) Wegen $0 \le q < 1$ gilt

   $$q^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{und damit} \qquad q^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1-q} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

   folglich gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $q^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1-q} < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$, und für alle $m,\ n \ge n_0$ mit $m = n + k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich

   $$|a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| \underset{\text{b)}}{\le} q^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1-q} < \varepsilon,$$

   so daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge ist.

19. a) Für „$\Longrightarrow$“ sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es bezeichne $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ihren Grenzwert; damit ist jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, insbesondere also $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, konvergent ebenfalls gegen den Grenzwert a. Für „$\Longleftarrow$“ seien die Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es bezeichne a ihren gemeinsamen Grenzwert. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es

   - wegen $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = a$ ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$ für alle $k \ge k_1$,

- wegen $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$ ein $k_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{2k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_2$,

und wir setzen $n_0 = \max\{2k_1 - 1,\, 2k_2\}$; für alle $n \geq n_0$ gilt nun

- im Falle, daß $n = 2k - 1$ ungerade ist, zum einen

$$|a_n - a| = |a_{2k-1} - a| < \varepsilon, \qquad \text{da} \quad k \geq k_1,$$

- im Falle, daß $n = 2k$ gerade ist, zum anderen

$$|a_n - a| = |a_{2k} - a| < \varepsilon, \qquad \text{da} \quad k \geq k_2,$$

so daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert a konvergiert.

b) Für „$\Longrightarrow$“ sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent; damit ist jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, insbesondere also $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent.

Für „$\Longleftarrow$“ seien die Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und ihre Grenzwerte seien mit

$$a = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1}, \qquad b = \lim_{k\to\infty} a_{2k} \qquad \text{und} \qquad c = \lim_{k\to\infty} a_{3k}$$

bezeichnet. Die Teilfolge $(a_{6\ell-3})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist

- sowohl die Teilfolge von $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ zur Indexfolge $(k_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $k_\ell = 3\ell - 1$
- als auch die Teilfolge von $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ zur Indexfolge $(k_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $k_\ell = 2\ell - 1$,

und damit ergibt sich

$$a = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{\ell\to\infty} a_{6\ell-3} = \lim_{k\to\infty} a_{3k} = c;$$

die Teilfolge $(a_{6\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist

- sowohl die Teilfolge von $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ zur Indexfolge $(k_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $k_\ell = 3\ell$
- als auch die Teilfolge von $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ zur Indexfolge $(k_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $k_\ell = 2\ell$,

und damit ergibt sich

$$b = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{\ell\to\infty} a_{6\ell} = \lim_{k\to\infty} a_{3k} = c.$$

Folglich gilt $a = b$, und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gemäß a) konvergent.

20. Für die gegebene durch

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = \tfrac{3}{2}, \quad a_4 = \tfrac{5}{3}, \quad a_5 = \tfrac{8}{5}, \quad a_6 = \tfrac{13}{8}, \ldots$$

Sie besitzt daher die Teilfolgen

$$(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = (a_1, a_3, a_5, \ldots) = \left(1,\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{8}{5},\ \ldots\right)$$

und

$$(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_2, a_4, a_6, \ldots) = \left(2,\ \tfrac{5}{3},\ \tfrac{13}{8},\ \ldots\right)$$

Wir zeigen zunächst $\quad 1 \le a_n \le 2 \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$“: Es ist $a_1 = 1$ und damit $1 \le a_1 \le 2$.

„$n \to n+1$“: Es ist $1 \le a_n \le 2$ und damit

$$1 \ge \frac{1}{a_n} \ge \frac{1}{2} \implies 2 \ge 1 + \frac{1}{a_n} \ge \frac{3}{2} \implies 2 \ge a_{n+1} \ge 1.$$

a) Wir zeigen $\quad a_{2k-1} \le a_{2k+1} \quad$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$k = 1$“: Es ist

$$a_1 = 1 \le \frac{3}{2} = a_3.$$

„$k \to k+1$“: Es ist

$$a_{2k-1} \le a_{2k+1} \underset{a_{2k-1}>0}{\implies} \frac{1}{a_{2k-1}} \ge \frac{1}{a_{2k+1}} \implies \underbrace{1 + \frac{1}{a_{2k-1}}}_{=a_{2k}} \ge \underbrace{1 + \frac{1}{a_{2k+1}}}_{=a_{2k+2}} \implies a_{2k} \ge a_{2k+2} \underset{a_{2k+2}>0}{\implies} \frac{1}{a_{2k}} \le \frac{1}{a_{2k+2}}$$

$$\implies \underbrace{1 + \frac{1}{a_{2k}}}_{=a_{2k+1}} \le \underbrace{1 + \frac{1}{a_{2k+2}}}_{=a_{2k+3}} \implies a_{2k+1} \le a_{2k+3}$$

Damit ist die zunächst Teilfolge $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt also $a_{2k-1} \le a_{2k+1}$, woraus sich

$$\frac{1}{a_{2k-1}} \ge \frac{1}{a_{2k+1}} \quad \text{und damit} \quad a_{2k} = 1 + \frac{1}{a_{2k-1}} \ge 1 + \frac{1}{a_{2k+1}} = a_{2k+2}$$

ergibt; folglich ist dann die Teilfolge $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

b) Die Teilfolge $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist gemäß a) monoton wachsend und gemäß den einleitenden Bemerkungen (durch 1 nach unten und 2 nach oben) beschränkt, also konvergent, und besitzt daher einen Grenzwert $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1}$, für den ebenfalls $1 \le a \le 2$ gilt. Wegen

$$a_{2k+1} = 1 + \frac{1}{a_{2k}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k-1}}} = 1 + \frac{a_{2k-1}}{a_{2k-1}+1} = \frac{2\,a_{2k-1}+1}{a_{2k-1}+1}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$a = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2\,a_{2k-1}+1}{a_{2k-1}+1} = \frac{2\,a+1}{a+1}$$

und damit

$$a\,(a+1) = 2\,a + 1, \qquad \text{also} \quad a^2 - a - 1 = 0,$$

woraus sich

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

wegen $1 \leq a \leq 2$ also

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ergibt. Des weiteren ist die Teilfolge gemäß a) $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt, also konvergent, und mit denselben Überlegungen wie eben ergibt sich für den Grenzwert $b = \lim\limits_{k \to \infty} a_{2k}$ dann

$$b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Damit konvergiert aber (unter Berücksichtigung von Aufgabe 19) auch die gesamte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a = b$.