Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

13. Zu betrachten ist die durch

$$a_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

a) Es ist

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{a_0}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} + 1 = \frac{7}{4}, \quad a_3 = \frac{a_2}{2} + 1 = \frac{15}{8}, \ldots,$$

also

$$a_0 = 2 - 1, \quad a_1 = 2 - \frac{1}{2}, \quad a_2 = 2 - \frac{1}{4}, \quad a_3 = 2 - \frac{1}{8}, \ldots,$$

wodurch die Vermutung

$$a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

nahegelegt wird; wir weisen diese mit Hilfe vollständiger Induktion nach:

- Für „$n = 0$“ ist

$$a_0 = 1 = 2 - 1 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^0.$$

- Für „$n \to n+1$“ folgt aus der Induktionsvoraussetzung

$$a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

unter Verwendung der Rekursionsvorschrift die Induktionsbehauptung

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + 1 = \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 1 \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 1 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Wegen $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ ergibt sich

$$a_n = 2 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 + 0 = 2;$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent gegen den Grenzwert $a = 2$.

b) Wir zeigen jeweils mit vollständiger Induktion:

- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$: für „$n = 0$“ ist

$$a_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_1 = \frac{a_0}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \qquad \text{also} \qquad a_0 \leq a_1,$$

und für „$n \to n+1$“ folgt aus $a_n \leq a_{n+1}$ zunächst mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation

$$\frac{a_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot a_n \underset{\text{wegen } \frac{1}{2}>0}{\leq} \frac{1}{2} \cdot a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2}$$

und dann mit dem Monotoniegesetz der Addition

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \leq \frac{a_{n+1}}{2} + 1 = a_{n+2}.$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend.

- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_n \leq 42$: für „$n = 0$“ ist

$$a_0 = 1, \qquad \text{also} \qquad a_0 \leq 42,$$

und für „$n \to n+1$“ folgt aus $a_n \leq 42$ zunächst mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation

$$\frac{a_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot a_n \underset{\text{wegen } \frac{1}{2}>0}{\leq} \frac{1}{2} \cdot 42 = 21$$

und dann mit dem Monotoniegesetz der Addition

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \leq 21 + 1 = 22, \qquad \text{insbesondere also} \qquad a_{n+1} \leq 42.$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach oben beschränkt.

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ insgesamt monoton wachsend und (nach oben) beschränkt, nach dem Hauptsatz über monotone Folgen mithin konvergent. Für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ergibt sich mit Hilfe der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{2} + 1\right) = \frac{a}{2} + 1,$$

also

$$\frac{a}{2} = 1 \qquad \text{und damit} \qquad a = 2.$$

14. Im Falle der Konvergenz der durch die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) \qquad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kommen für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ wegen

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) = \frac{1}{5}\left(a^2 + 6\right)$$

und damit

$$0 = a^2 - 5\,a + 6 \underset{\text{Vieta}}{=} (a-2)(a-3)$$

nur die beiden Werte $a = 2$ und $a = 3$ in Frage. Dies motiviert die folgende Fallunterscheidung hinsichtlich des Startwertes $a_0 \in [0,3]$:

- Für $a_0 = 2$ ist $a_1 = \frac{1}{5}\left(2^2 + 6\right) = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2$ und analog $a_n = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $a = 2$.
- Für $a_0 = 3$ ist $a_1 = \frac{1}{5}\left(3^2 + 6\right) = \frac{1}{5} \cdot 15 = 3$ und analog $a_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $a = 3$.
- Für $a_0 \in \,]2,3[$ zeigen wir zunächst $a_n \in \,]2,3[$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion: für „$n = 0$“ ist dies klar, und für „$n \to n+1$“ gilt

  $$\begin{aligned} a_n \in \,]2,3[\implies 2 < a_n < 3 \implies 4 < a_n^2 < 9 \implies 10 < a_n^2 + 6 < 15 \implies \\ \implies 2 < \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) < 3 \implies 2 < a_{n+1} < 3 \implies a_{n+1} \in \,]2,3[\,. \end{aligned}$$

  Damit ergibt sich aber

  $$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) - a_n = \frac{1}{5}\left(a_n^2 - 5\,a_n + 6\right) = \frac{1}{5}\underbrace{(a_n - 3)}_{<0}\underbrace{(a_n - 2)}_{>0} < 0$$

  und somit $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; folglich ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ streng monoton fallend und (etwa durch 2) nach unten beschränkt, also konvergent; als Grenzwert kommt nur $a = 2$ in Frage.
- Für $a_0 \in [0,2[$ zeigen wir zunächst $a_n \in [0,2[$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion: für „$n = 0$“ ist dies klar, und für „$n \to n+1$“ gilt

  $$\begin{aligned} a_n \in [0,2[\implies 0 \leq a_n < 2 \implies 0 \leq a_n^2 < 4 \implies 6 \leq a_n^2 + 6 < 10 \implies \\ \implies \frac{6}{5} \leq \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) < 2 \implies 0 \leq a_{n+1} < 2 \implies a_{n+1} \in [0,2[\,. \end{aligned}$$

  Damit ergibt sich aber

  $$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) - a_n = \frac{1}{5}\left(a_n^2 - 5\,a_n + 6\right) = \frac{1}{5}\underbrace{(a_n - 3)}_{<0}\underbrace{(a_n - 2)}_{<0} > 0$$

  und somit $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; folglich ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ streng monoton wachsend und (etwa durch 2) nach oben beschränkt, also konvergent; als Grenzwert kommt nur $a = 2$ in Frage.

15. Für einen beliebigen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ ist die durch

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zu betrachten.

a) Sei $a_0 \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Startwert. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$a_{n+1} - a_n = \left(a_n^2 - a_n + 1\right) - a_n = a_n^2 - 2\,a_n + 1 = (a_n - 1)^2 \geq 0,$$

also $a_{n+1} \geq a_n$; damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend. Gemäß dem Hauptsatz über monotone Folgen gibt es nun hinsichtlich des Konvergenzverhaltens der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nur die beiden Alternativen:

- Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach oben beschränkt, so ist sie konvergent. Für ihren in diesem Fall existierenden Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ erhält man mit Hilfe der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n^2 - a_n + 1\right) = a^2 - a + 1,$$

folglich

$$0 = \left(a^2 - a + 1\right) - a = a^2 - 2\,a + 1 = (a-1)^2,$$

also $a - 1 = 0$ und damit zwingend $a = 1$.

- Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht nach oben beschränkt, so ist sie bestimmt divergent gegen $+\infty$.

b) Für einen Startwert $a_0 \in [0,1]$ zeigen wir $a_n \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit vollständiger Induktion:

- Für „$n = 0$“ gilt $a_0 \in [0,1]$ gemäß der Wahl des Startwerts.
- Für „$n \to n+1$“ gilt gemäß der Induktionsvoraussetzung $a_n \in [0,1]$, also $0 \leq a_n \leq 1$, woraus $a_n^2 \leq a_n$ und damit

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \leq a_n - a_n + 1 = 1$$

folgt; mit der in a) gezeigten Monotonie gilt ferner $a_{n+1} \geq a_n \geq 0$.

Damit ist die gemäß a) monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auch (nach oben) beschränkt, mithin konvergent, und gemäß a) besitzt sie den Grenzwert $a = 1$.

c) Für einen Startwert $a_0 \notin [0,1]$ gilt $a_0 < 0$ oder $a_0 > 1$, insbesondere also $a_0^2 > a_0$, woraus

$$a_1 = a_0^2 - a_0 + 1 > a_0 - a_0 + 1 = 1$$

folgt. Unter der Annahme, die gemäß a) monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist nach oben beschränkt, erhält man ihre Konvergenz, und für ihren Grenzwert a ergibt sich in

$$a \underset{\text{Monotonie}}{\geq} a_1 > 1 \underset{\text{gemäß a)}}{=} a$$

ein Widerspruch. Folglich ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht nach oben beschränkt, mithin bestimmt divergent gegen $+\infty$.

16. Es seien $0 < a_1 < b_1$ fest gewählt. Man betrachte die beiden über die Rekursion

$$a_{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir zeigen zunächst, daß $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist:

- Wir zeigen $0 < a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
  - „$n = 1$“: Es ist $0 < a_1 < b_1$ nach Voraussetzung und damit $0 < a_1 \leq b_1$.
  - „$n \to n+1$“: Wegen $0 < a_n \leq b_n$ gilt $0 < a_{n+1}$ und $0 < b_{n+1}$ sowie

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} - 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} = \\ &= \frac{(a_n + b_n)^2 - 4 \cdot a_n \cdot b_n}{2 \cdot (a_n + b_n)} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2 \cdot (a_n + b_n)} \geq 0, \end{aligned}$$

    also $b_{n+1} - a_{n+1} \geq 0$ bzw. $b_{n+1} \geq a_{n+1}$, insgesamt also $0 < a_{n+1} \leq b_{n+1}$.
- Wegen $0 < a_n \leq b_n$ erhalten wir

$$a_{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} \geq 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{b_n + b_n} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{2 \cdot b_n} = a_n,$$

  also $a_{n+1} \geq a_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der unteren Intervallgrenzen monoton wachsend.
- Wegen $0 < a_n \leq b_n$ erhalten wir

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = \frac{2 \cdot b_n}{2} = b_n,$$

  also $b_{n+1} \leq b_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der oberen Intervallgrenzen monoton fallend.
- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und wegen $a_n \leq b_n \leq b_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach oben beschränkt, also konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und wegen $b_n \geq a_n \geq a_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach unten beschränkt, also konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Damit gilt aber auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = b$, und wir erhalten mit Hilfe der Rekursionsvorschrift von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a + b}{2},$$

  also $2\,b = a + b$ und damit $b = a$; folglich ist wegen

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = b - a = 0$$

  die Folge $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Intervallängen eine Nullfolge.

Wir bestimmen nun das durch die Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ definierte Element $r \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$; dabei gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = r = b = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

wegen $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ insbesondere $r \geq 0$. Wir zeigen dazu $a_n \cdot b_n = a_1 \cdot b_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion: für „$n = 1$“ ist $a_1 \cdot b_1 = a_1 \cdot b_1$, und für „$n \to n+1$“ folgt aus $a_n \cdot b_n = a_1 \cdot b_1$ schon

$$a_{n+1} \cdot b_{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} \cdot \frac{a_n + b_n}{2} = a_n \cdot b_n = a_1 \cdot b_1.$$

Damit ergibt sich

$$r^2 = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a_1 \cdot b_1,$$

wegen $r \geq 0$ also $r = \sqrt{a_1 \cdot b_1}$; es ist also $\sqrt{a_1 \cdot b_1} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.