

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

5. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ergibt sich für ein fest gewähltes $r > 0$ zunächst

$$a_n = \frac{\sqrt{rn}}{1 + r\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{r} \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + r \right)} = \frac{\sqrt{r}}{\frac{1}{\sqrt{n}} + r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{r}}{0 + r} = \frac{1}{\sqrt{r}};$$

damit besitzt die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ den Grenzwert $a = \frac{1}{\sqrt{r}} \in \mathbb{R}$. Dabei gilt

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left| \frac{\sqrt{rn}}{1 + r\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{r}} \right| = \left| \frac{\sqrt{rn} \cdot \sqrt{r} - 1 \cdot (1 + r\sqrt{n})}{(1 + r\sqrt{n}) \cdot \sqrt{r}} \right| \\ &= \left| \frac{r\sqrt{n} - 1 - r\sqrt{n}}{(1 + r\sqrt{n}) \cdot \sqrt{r}} \right| = \left| \frac{-1}{(1 + r\sqrt{n}) \cdot \sqrt{r}} \right| \\ &= \frac{1}{(1 + r\sqrt{n}) \cdot \sqrt{r}} \leq \frac{1}{r\sqrt{n} \cdot \sqrt{r}} = \frac{1}{r\sqrt{r}\sqrt{n}} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und es ist

$$\frac{1}{r\sqrt{r}\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \frac{1}{r\sqrt{r}\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \frac{1}{r^3\varepsilon^2} < n;$$

wir können also jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{r^3\varepsilon^2}$ wählen, und für alle $n \geq n_0$ gilt dann $n > \frac{1}{r^3\varepsilon^2}$ und damit

$$|a_n - a| \leq \frac{1}{r\sqrt{r}\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

6. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Wir zeigen, daß die beiden Folgen $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen

$$c_n = \min\{a_n, b_n\} \quad \text{und} \quad d_n = \max\{a_n, b_n\}.$$

konvergieren, indem wir nachweisen, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \min\{a, b\} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \max\{a, b\}$$

gilt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es

- wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$,
- wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ für alle $n \geq n_2$;

es sei $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}_0$. Wir treffen nun folgende Fallunterscheidung:

- Fall 1: Sei $a = b$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{und} \quad a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$$

und folglich auch

$$a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon \quad \text{und} \quad a - \varepsilon < d_n < a + \varepsilon;$$

somit gilt nach Definition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a = \min\{a, b\} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = a = \max\{a, b\}.$$

- Fall 2: Sei $a < b$. Speziell zu $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$ gilt für alle $n \geq n_0$ dann

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon.$$

Damit folgt $c_n = a_n$ und $d_n = b_n$ alle $n \geq n_0$, und wir erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \min\{a, b\}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b = \max\{a, b\}.$$

- Fall 3: Sei $a > b$. Speziell zu $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ gilt für alle $n \geq n_0$ dann

$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Damit folgt $c_n = b_n$ und $d_n = a_n$ alle $n \geq n_0$, und wir erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b = \min\{a, b\}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \max\{a, b\}.$$

7. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besteht das Folgenglied a_n aus genau sieben Summanden, und wir erhalten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+6)^2 + (n+7)^2}{n^2} = \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{(n+2)^2}{n^2} + \dots + \frac{(n+6)^2}{n^2} + \frac{(n+7)^2}{n^2} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n+6}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+7}{n}\right)^2 = \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2}_{\rightarrow 0} + \dots + \underbrace{\left(1 + \frac{6}{n}\right)^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left(1 + \frac{7}{n}\right)^2}_{\rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{(1+0)^2 + (1+0)^2 + \dots + (1+0)^2 + (1+0)^2}_{7 \text{ Summanden}} = 7. \end{aligned}$$

Dagegen besteht für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Folgenglied

$$b_n = \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (2n-1)^2 + (2n)^2}{n^3}$$

aus genau n Summanden; die Anzahl der Summanden wird also für wachsendes n beliebig groß. Wir schreiben daher zunächst den Zähler des Folgenglieds b_n unter Verwendung der Formel

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gemäß

$$\begin{aligned} (n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (2n-1)^2 + (2n)^2 &= \sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= \frac{n(2n+1)}{6} \cdot [2(4n+1) - (n+1)] = \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6} \end{aligned}$$

ohne Summenzeichen und erhalten damit

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (2n-1)^2 + (2n)^2}{n^3} = \\ &= \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6n^3} = \frac{n}{6n} \cdot \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{7n+1}{n} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\left(2 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 2} \cdot \underbrace{\left(7 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 7} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 7 = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

8. Hinsichtlich der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1 - x^n}{1 + x^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Für $|x| < 1$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 + x^n} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

- Für $|x| > 1$ können wir

$$a_n = \frac{1 - x^n}{1 + x^n} = \frac{\frac{1}{x^n} - 1}{\frac{1}{x^n} + 1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ schreiben; wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty \quad \text{ist} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^n} - 1}{\frac{1}{x^n} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1.$$

- Für $|x| = 1$ ist wegen $x \neq -1$ nur $x = 1$ zu betrachten; wegen $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dann eine Nullfolge.

Hinsichtlich der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \frac{y^n}{1 + y^{2n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Für $|y| < 1$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y^n = 0 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (y^n)^2 = 0^2 = 0;$$

folglich ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y^n}{1 + y^{2n}} = \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

- Für $|y| > 1$ ist $y \neq 0$, und wir können

$$b_n = \frac{y^n}{1 + y^{2n}} = \frac{\frac{1}{y^n}}{\frac{1}{y^{2n}} + 1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ schreiben; wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |y|^n = \infty$$

ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y^n} = 0 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{y^n} \right)^2 = 0^2 = 0,$$

woraus sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{y^n}}{\frac{1}{y^{2n}} + 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0$$

ergibt.

- Für $|y| = 1$ ist $y = 1$ oder $y = -1$:
 - Für $y = 1$ ist $b_n = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $\frac{1}{2}$.
 - Für $y = -1$ ist $b_n = (-1)^n \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die alternierende Folge $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots)$, die jedoch divergiert.