MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 1
19.10.2015

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Wir untersuchen die drei gegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} =$$
$$= \frac{n\cdot(n+1) - (n-1)\cdot(n+2)}{(n+2)\cdot(n+1)} =$$
$$= \frac{(n^2+n) - (n^2+n-2)}{(n+2)\cdot(n+1)} = \frac{2}{(n+2)\cdot(n+1)} > 0,$$

also $a_{n+1} > a_n$, und damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend; wegen

$$0 \leq \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \leq 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zudem beschränkt.

- Wir bestimmen zunächst die ersten vier Folgenglieder der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$; es ist $b_1 = 0$, $b_2 = \frac{1}{5}$, $b_3 = \frac{1}{5}$ und $b_4 = \frac{3}{17}$. Wegen $b_2 = b_3 > b_1$ und $b_2 = b_3 > b_4$ ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht monoton; wegen

$$0 \leq \frac{n-1}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

- Mit der Gaußformel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gilt

$$c_n = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2\,n}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{(n+1)+1}{2\cdot(n+1)}}{\frac{n+1}{2\,n}} = \frac{\frac{n+2}{2\cdot(n+1)}}{\frac{n+1}{2\,n}} = \frac{(n+2)\cdot 2\,n}{2\cdot(n+1)^2} = \frac{n^2+2\,n}{n^2+2\,n+1} < 1,$$

wegen $c_n > 0$ also $c_{n+1} < c_n$, und damit ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend; wegen

$$0 \leq \frac{n+1}{2\,n} \leq \frac{n+n}{2\,n} = 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zudem beschränkt.

b) Wir zeigen nun die Konvergenz der drei gegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anhand der Definition.

- Wir zeigen, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $a = 1$ besitzt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - a| = \left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- Wir zeigen, daß die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $b = 0$ besitzt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$|b_n - b| = \left|\frac{n-1}{n^2+1} - 0\right| = \frac{n-1}{n^2+1} \leq \frac{n-1}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

- Wir zeigen, daß die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $c = \frac{1}{2}$ besitzt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$|c_n - c| = \left|\frac{n+1}{2\,n} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2\,n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

2. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} &= \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{n!}{n^n} = \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \Bigg(\underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{>1}\Bigg)^n > 1,\end{aligned}$$

wegen $a_n > 0$ also $a_{n+1} > a_n$; folglich ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend, insbesondere also durch $a_1 = 1$ nach unten beschränkt. Wegen

$$\begin{aligned}a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \cdot n \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n} &= \\ = \underbrace{\frac{n}{1}}_{=n} \cdot \underbrace{\frac{n}{2}}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\frac{n}{3}}_{\geq 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n}{n-2}}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} &\geq n\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber nicht nach oben beschränkt: für jedes $K \in \mathbb{R}^+$ gibt es nämlich (nach dem Archimedischen Axiom) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > K$, und es ergibt sich $a_n \geq n > K$. Da nun die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist, kann sie auch nicht konvergieren, besitzt also keinen Grenzwert.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{a_n},$$

so daß sich zunächst wegen $a_{n+1} > a_n > 0$ gemäß a)

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_n} = b_n$$

ergibt; folglich ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend. Des weiteren existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, und für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|b_n - 0| = |b_n| = b_n = \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon;$$

damit konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $b = 0$ und ist als konvergente Folge insbesondere beschränkt.

3. a) Wir zeigen

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

- „$n = 2$“: Es ist

$$\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = 1 - \frac{2}{2(2+1)} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{2}\right)$$

- „$n \to n+1$“: Es ist

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) &= \left(\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{4}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2(n+1)(n+2) - 2n - 4}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2n^2 + 6n + 4 - 2n - 4}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2n^2 + 4n}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2n(n+2)}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

b) Wir zeigen anhand der Definition, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $a = \frac{1}{3}$ besitzt. Zunächst gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{3} + \frac{2}{3\,n} - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3\,n} \leq \frac{1}{n}.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$, und für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon;$$

damit konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a = \frac{1}{3}$. Für $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ kann wegen

$$\frac{1}{n_0} < \frac{1}{1000} \quad \text{bzw.} \quad n_0 > 1000$$

etwa $n_0 = 1001$ gewählt werden.

4. a) Die erste Aussage ist wahr: sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, so gilt

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{und} \quad b_n \leq b_{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

woraus mit dem Monotoniegesetz der Addition

$$a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

folgt; damit ist auch die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

b) Die zweite Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel wählen wir die beiden monoton wachsenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n^2$ und $b_n = -\frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \cdot b_n = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dagegen nicht monoton wachsend.

c) Die dritte Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel wählen wir die beiden nicht beschränkten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n$ und $b_n = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n + b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dagegen beschränkt.

d) Die vierte Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel wählen wir die beiden nicht beschränkten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad b_n = \begin{cases} 0, & \text{für } n \text{ gerade,} \\ n, & \text{für } n \text{ ungerade;} \end{cases}$$

die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \cdot b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dagegen beschränkt.