MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Klausur
31.03.2016

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_n &= n \cdot \left(\sqrt{n^2 + \alpha\, n + 1} - n\right) \\ &= n \cdot \frac{\left(\sqrt{n^2 + \alpha\, n + 1} - n\right) \cdot \left(\sqrt{n^2 + \alpha\, n + 1} + n\right)}{\sqrt{n^2 + \alpha\, n + 1} + n} \\ &= n \cdot \frac{\sqrt{n^2 + \alpha\, n + 1}^{\,2} - n^2}{\sqrt{n^2 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} + n} = n \cdot \frac{(n^2 + \alpha\, n + 1) - n^2}{n \cdot \sqrt{1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n^2}} + n} \\ &= n \cdot \frac{\alpha\, n + 1}{n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1\right)} = \frac{\alpha\, n + 1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}; \end{aligned}$$

wegen

$$1 + \underbrace{\frac{\alpha}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + 0 + 0 = 1$$

folgt wegen der Stetigkeit der Quadratwurzel (an der Stelle 1) für den Nenner

$$\sqrt{1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{1} + 1 = 2,$$

wodurch folgende Fallunterscheidung motiviert wird: für $\alpha > 0$ ergibt sich

$$a_n = \frac{\overbrace{\alpha\, n + 1}^{\to +\infty}}{\underbrace{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}_{\to 2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$

und für $\alpha = 0$ erhält man

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

b) Zu betrachten ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \dfrac{(\ln x)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(\ln x)^n}{n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{|\ln x|^n}{n}} = \frac{|\ln x|}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} |\ln x|$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium

- für alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $|\ln x| < 1$ (absolut) konvergent, wegen

$$|\ln x| < 1 \iff -1 < \ln x < 1 \iff e^{-1} < x < e$$

  also für $x \in \left]e^{-1}, e\right[$, sowie
- für alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $|\ln x| > 1$ divergent, wegen

$$|\ln x| > 1 \iff \ln x < -1 \text{ oder } 1 < \ln x \iff x < e^{-1} \text{ oder } e < x$$

  also für $x \in \left]0, e^{-1}\right[\cup \left]e, +\infty\right[$.

Es sind noch die Fälle $x \in \{e^{-1}, e\}$ zu untersuchen:

- Für $x = e$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln e)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

  als harmonische Reihe divergent, und
- für $x = e^{-1}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln e^{-1})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

  als alternierende harmonische Reihe konvergent.

Insgesamt konvergiert also die gegebene Reihe genau für alle $x \in \left[e^{-1}, e\right[$.

c) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{x^{2n}}{2^{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen

$$\frac{x^{2n}}{2^{n+1}} = \frac{(x^2)^n}{2^n \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2)^n}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

handelt es sich um die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c\, q^n$ mit $c = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{x^2}{2}$, die wegen $c \neq 0$ genau dann konvergiert, wenn $|q| < 1$ gilt; wegen

$$|q| < 1 \iff \left|\frac{x^2}{2}\right| < 1 \iff \frac{x^2}{2} < 1 \iff x^2 < 2 \iff |x| < \sqrt{2}$$

ist dies genau für $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$ der Fall, und wir erhalten dann die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot q^n = \frac{c}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2 - x^2}.$$

2. a) Zu betrachten ist die durch

$$a_1 = 2016 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^3 + 4}{a_n^2 + 1} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Wir zeigen $a_n > 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
  - für „$n = 1$" gilt $a_1 = 2016$ und damit $a_1 > 4$;
  - für „$n \to n+1$" folgt aus $a_n > 4$ wegen

$$a_{n+1} - 4 = \frac{a_n^3 + 4}{a_n^2 + 1} - 4 = \frac{(a_n^3 + 4) - 4\,(a_n^2 + 1)}{a_n^2 + 1} =$$

$$= \frac{(a_n^3 + 4) - (4\,a_n^2 + 4)}{a_n^2 + 1} = \frac{a_n^3 - 4\,a_n^2}{a_n^2 + 1} = \frac{\overbrace{a_n^2}^{>0}\,\overbrace{(a_n - 4)}^{>0}}{\underbrace{a_n^2 + 1}_{>0}} > 0$$

  schon $a_{n+1} > 4$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^3 + 4}{a_n^2 + 1} - a_n = \frac{(a_n^3 + 4) - a_n\,(a_n^2 + 1)}{a_n^2 + 1} =$$

$$= \frac{(a_n^3 + 4) - (a_n^3 + a_n)}{a_n^2 + 1} = \frac{\overbrace{4 - a_n}^{<0,\text{ wegen } a_n > 4}}{\underbrace{a_n^2 + 1}_{>0}} < 0$$

  schon $a_{n+1} < a_n$; damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend.
- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gemäß b) monoton fallend und gemäß a) durch 4 nach unten beschränkt, nach dem Hauptsatz über monotone Folgen mithin konvergent; für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ergibt sich

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3 + 4}{a_n^2 + 1} = \frac{a^3 + 4}{a^2 + 1}$$

  und damit

$$a\left(a^2 + 1\right) = a^3 + 4 \quad \text{bzw.} \quad a^3 + a = a^3 + 4, \qquad \text{also} \qquad a = 4.$$

b) Zu untersuchen ist die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, b_n \qquad \text{mit} \qquad b_n = \frac{a_n}{n} > 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Wegen

$$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4 \qquad \text{und damit} \qquad b_n = \frac{\overbrace{a_n}^{\to 4}}{\underbrace{n}_{\to+\infty}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge; wegen

$$a_n \geq a_{n+1} > 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} > 0,$$

  gemäß dem Monotoniegesetz der Multiplikation damit

$$b_n = \frac{a_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot a_n \geq \frac{1}{n+1} \cdot a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n+1} = b_{n+1} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Folglich ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ nach dem Leibnizkriterium für alternierende Reihen konvergent.

- Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ ist definitionsgemäß genau dann absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^n b_n| \underset{b_n>0}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert; wegen

$$b_n = \frac{a_n}{n} \underset{a_n \geq a=4}{\geq} \frac{4}{n} \geq \frac{1}{n} \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}$$

besitzt aber die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ als divergente Minorante und ist folglich nach dem Minorantenkriterium selbst divergent, so daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ nicht absolut konvergiert.

3. Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x} + \cos(\pi x),$$

ist (als Summe von Verkettungen der Exponentialfunktion und des Cosinus mit linearen Funktionen) stetig (für a) und b)) und differenzierbar (für c)) mit

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (-1) + (-\sin(\pi x) \cdot \pi) = -\left(e^{-x} + \pi \cdot \sin(\pi x)\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

a) Wegen

$$f(x) = \underbrace{e^{-x}}_{>0} + \underbrace{\cos(\pi x)}_{\geq -1} > -1 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

gilt zunächst $W_f \subseteq \,]-1, +\infty[$, und für „$\supseteq$“ sei $y \in \,]-1, +\infty[$; wegen

$$f(-2n) \underset{n\in\mathbb{N}}{=} \underbrace{e^{2n}}_{\to+\infty} + \underbrace{\cos(-2n\pi)}_{=1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) > y$, und wegen

$$f(2n+1) \underset{n\in\mathbb{N}}{=} \underbrace{e^{-(2n+1)}}_{\to 0} + \underbrace{\cos((2n+1)\pi)}_{=-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$$

gibt es ein $b > 0$ mit $f(b) < y$, so daß es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in \,]a, b[$ mit $f(\xi) = y$ gibt. Folglich ist $y \in W_f$, und es gilt $W_f = \,]-1, +\infty[$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt zum einen

$$f(2n) = \underbrace{e^{-2n}}_{>0} + \underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} > 0 + 1 = 1 > 0$$

und zum anderen

$$f(2n+1) = \underbrace{e^{-(2n+1)}}_{<1} + \underbrace{\cos((2n+1)\pi)}_{=-1} < 1 + (-1) = 0,$$

so daß f nach dem Nullstellensatz im offenen Intervall $]2n,\ 2n+1[$ mindestens eine Nullstelle besitzt; da nun die Intervalle $]2n,\ 2n+1[$ für $n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt sind, besitzt f unendlich viele Nullstellen.

c) Für alle $x < -\ln\pi$ gilt $-x > \ln\pi$, wegen des Monotonieverhaltens der Exponentialfunktion also $e^{-x} > e^{\ln\pi} = \pi$, folglich

$$\underbrace{e^{-x}}_{>\pi} + \pi\cdot\sin(\pi x) > \pi + \pi\cdot\underbrace{\sin(\pi x)}_{\geq -1} \geq \pi + \pi\cdot(-1) = \pi + (-\pi) = 0$$

und damit

$$f'(x) = -\underbrace{\left(e^{-x} + \pi\cdot\sin(\pi x)\right)}_{>0} < 0.$$

4. a) Es kann keine differenzierbare Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit dem Wertebereich $W_f =]-1,1[$ geben: als differenzierbare Funktion ist f insbesondere stetig und besitzt daher auf dem abgeschlossenen Definitionsintervall $[-1,1]$ nach dem Satz von Weierstraß Minimum und Maximum; es gibt also Punkte $p,\ q \in [-1,1]$ mit $W_f = [f(p), f(q)]$, insbesondere gilt also $W_f \neq]-1,1[$.

b) Die Funktion

$$f :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|,$$

ist wegen

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|-|0|}{x-0} \underset{x>0}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0+} 1 = 1$$

und

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|-|0|}{x-0} \underset{x<0}{=} \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0-} (-1) = -1$$

(im Punkte $a = 0$) nicht differenzierbar, aber ihr Quadrat

$$f^2 :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad f^2(x) = (f(x))^2 = (|x|)^2 = \left|x^2\right| = x^2,$$

ist (als quadratische Funktion) differenzierbar.

c) Die Funktion

$$f :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3,$$

ist bekanntlich streng monoton wachsend mit $W_f =]-1,1[$, mithin umkehrbar, und (als Polynomfunktion) differenzierbar; ihre Umkehrfunktion

$$f^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{für } x \geq 0, \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

ist wegen

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x-0} \underset{x>0}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^3} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = +\infty$$

(im Punkte $a = 0$) nicht differenzierbar.