MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Klausur
13.02.2016

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

1. a)
- Die reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geq n_0$ dann $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.
- Für ein fest gewähltes $a > 0$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{a \cdot \sqrt[3]{n}}{a + \sqrt[3]{n}} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten. Sei $\varepsilon > 0$; für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_n - a| = \left|\frac{a \cdot \sqrt[3]{n}}{a + \sqrt[3]{n}} - a\right| = \left|\frac{a \cdot \sqrt[3]{n} - a \cdot (a + \sqrt[3]{n})}{a + \sqrt[3]{n}}\right| =$$
$$= \left|\frac{a \cdot \sqrt[3]{n} - a^2 - a \cdot \sqrt[3]{n}}{a + \sqrt[3]{n}}\right| = \left|\frac{-a^2}{a + \sqrt[3]{n}}\right| = \frac{a^2}{a + \sqrt[3]{n}} \underset{a>0}{\leq} \frac{a^2}{\sqrt[3]{n}}$$

mit

$$\frac{a^2}{\sqrt[3]{n}} < \varepsilon \iff \frac{a^2}{\varepsilon} < \sqrt[3]{n} \underset{(*)}{\iff} \left(\frac{a^2}{\varepsilon}\right)^3 < n \iff \frac{a^6}{\varepsilon^3} < n,$$

wobei in $(*)$ die strenge Monotonie der dritten Potenz bzw. der dritten Wurzel eingeht. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{a^6}{\varepsilon^3}$, und für alle $n \geq n_0$ gilt $n > \frac{a^6}{\varepsilon^3}$ und damit

$$|a_n - a| \leq \frac{a^2}{\sqrt[3]{n}} < \varepsilon;$$

damit besitzt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert a.

b)
- Für eine monoton fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen gilt:
  - Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen das Infimum der Folgenglieder $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
  - Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, so divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $-\infty$.
- Zu betrachten ist die durch

$$a_1 = 2 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^3}{9} + 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; wir zeigen

$$a_n \geq a_{n+1} \geq 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

mittels vollständiger Induktion:

– für „$n = 1$“ ist

$$a_1 = 2 \qquad \text{und} \qquad a_2 = \frac{a_1^3}{9} + 1 = \frac{2^3}{9} + 1 = \frac{17}{9},$$

also $a_1 \geq a_2 \geq 1$.

– für „$n \to n+1$“ gilt $a_n \geq a_{n+1} \geq 1$ gemäß Induktionsvoraussetzung, woraus zunächst wegen der Monotonie der dritten Potenz

$$a_n^3 \geq a_{n+1}^3 \geq 1^3 = 1$$

und dann mit den Monotoniegesetzen der Multiplikation und der Addition

$$\frac{a_n^3}{9} + 1 \geq \frac{a_{n+1}^3}{9} + 1 \geq \frac{1}{9} + 1 \geq 1,$$

also in $a_{n+1} \geq a_{n+2} \geq 1$ die Induktionsbehauptung folgt.

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und (etwa durch 1 nach unten) beschränkt, nach dem Hauptsatz über monotone Folgen also konvergent.

2. a) In Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{(nx)^n}{(2n)!} = \frac{n^n x^n}{(2n)!} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten; für $x = 0$ ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit ist die Reihe absolut konvergent. Für $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n x^n}\right| = \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \\
&= \left|\frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \cdot x\right| \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \cdot |x| \\
&= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \cdot \underbrace{\frac{1}{2(2n+1)}}_{\to 0} \cdot |x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e \cdot 0 \cdot |x| = 0 < 1;
\end{aligned}$$

damit ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent.

b) In Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \text{mit} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten; wegen

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}\right|} = \sqrt[n]{\frac{(e^{-x})^n}{n}} = \frac{e^{-x}}{\sqrt[n]{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-x}}{1} = e^{-x};$$

die Reihe nach dem Wurzelkriterium für

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $e^{-x} < 1$, also für $x > 0$, (absolut) konvergent, und
- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $e^{-x} > 1$, also für $x < 0$, divergent.

Für $x = 0$ ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ als alternierende harmonische Reihe konvergent, so daß die Reihe genau für alle $x \geq 0$ konvergiert.

c) In Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \qquad \text{mit} \qquad c_n = \left(\frac{4}{\pi} \arctan x\right)^n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

zu betrachten; diese besitzt die Gestalt der geometrischen Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = \frac{4}{\pi} \arctan x$. Diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ gilt, wegen

$$\left|\frac{4}{\pi} \arctan x\right| < 1 \iff -1 < \frac{4}{\pi} \arctan x < 1 \iff$$
$$\iff -\frac{\pi}{4} < \arctan x < \frac{\pi}{4} \iff -1 < x < 1$$

also genau für $x \in \left]-1, 1\right[$, und in diesem Fall gilt für die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \arctan x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{4}{\pi} \arctan x} = \frac{\pi}{\pi - 4 \arctan x}.$$

3. a)
- Für eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ gibt es (mindestens) ein $\xi \in \left]a, b\right[$ mit $f(\xi) = 0$.
- Zu betrachten ist eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$a < f(x) < b \qquad \text{für alle} \qquad x \in [a,b]\,;$$

insbesondere gilt also $a < f(a)$ und $f(b) < b$. Die Hilfsfunktion

$$h : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - x,$$

ist als Differenz zweier stetiger Funktionen selbst stetig, und es gilt

$$h(a) = f(a) - a > 0 \qquad \text{und} \qquad h(b) = f(b) - b < 0,$$

also $h(a) \cdot h(b) < 0$; damit existiert nach dem Nullstellensatz (mindestens) ein $\xi \in \left]a, b\right[$ mit $h(\xi) = 0$, also $f(\xi) - \xi = 0$ bzw. $f(\xi) = \xi$.

b) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{2016} + 2016\, x^2 + 1,$$

ist eine Polynomfunktion und damit insbesondere stetig.

- Wegen
$$f(x) = \underbrace{x^{2016}}_{\geq 0} + \underbrace{2016\,x^2}_{\geq 0} + 1 \geq 1 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$
gilt zunächst $W_f \subseteq [1, +\infty[$; für „$\supseteq$“ sei $y \in [1, +\infty[$. Es ist
$$f(0) = 0^{2016} + 2016 \cdot 0^2 + 1 = 1 \leq y,$$
und wegen
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\underbrace{x^{2016}}_{\to+\infty} + \underbrace{2016\,x^2}_{\to+\infty} + 1 \Big) = +\infty$$
gibt es ein $b > 0$ mit $y \leq f(b)$, so daß für die stetige Funktion f nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [0, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(\xi) = y$ existiert. Insgesamt gilt also $W_f = [1, +\infty[$.
- Für alle $h > 0$ ist $-h < 0$, insbesondere also $-h \neq h$, mit
$$f(-h) = (-h)^{2016} + 2016\,(-h)^2 + 1 = h^{2016} + 2016\,h^2 + 1 = f(h);$$
folglich ist f nicht injektiv, mithin nicht umkehrbar.

4. a) Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie $a \in \mathbb{R}$.
- – Eine Funktion f heißt stetig im Punkt a, wenn $f(x) \to f(a)$ für $x \to a$ gilt.
  – Eine Funktion f heißt differenzierbar im Punkt $a \in D$, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ für $x \to a$ (im eigentliche Sinne) existiert.
- Ist f in a differenzierbar, so existiert
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R},$$
und wegen $\lim\limits_{x\to a}(x - a) = 0$ folgt
$$\lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right) = f'(a) \cdot 0 = 0,$$
also $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$; damit ist f in a stetig.

b) Die gegebene Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{falls } x > 0, \\ \sin x, & \text{falls } x \leq 0, \end{cases}$$
ist zunächst in allen Punkten $a \neq 0$ differenzierbar und damit auch stetig: für $a > 0$ ergibt sich dies nach der Produktregel und (für den zweiten Faktor) der Kettenregel, für $a < 0$ direkt über den Sinus. Im Punkt $a = 0$ gilt nun:

- Es ist $f(0) = \sin 0 = 0$, und für den linksseitigen Grenzwert ergibt sich

$$\lim_{x\to 0-} f(x) \underset{x<0}{=} \lim_{x\to 0-} \sin x \underset{\sin\ \text{stetig}}{=} \sin 0 = f(0);$$

für alle $x > 0$ gilt ferner

$$|f(x) - f(0)| = \left| x \cdot \cos\frac{1}{\sqrt{x}} - 0 \right| = |x| \cdot \underbrace{\left|\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right|}_{\leq 1} \leq |x| \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} 0,$$

und das Schrankenlemma liefert auch für den rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+} (f(x) - f(0)) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0).$$

Folglich gilt $f(x) \to f(0)$ für $x \to 0$, und f ist auch in $a = 0$ stetig.

- Für $x > 0$ ergibt sich der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot \cos\frac{1}{\sqrt{x}} - 0}{x - 0} = \frac{x \cdot \cos\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \cos\frac{1}{\sqrt{x}};$$

die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \frac{1}{n^2\pi^2} > 0 \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}$$

ist gemäß $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ eine Nullfolge, die Folge $\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wegen

$$\cos\frac{1}{\sqrt{x_n}} = \cos\sqrt{\frac{1}{x_n}} = \cos\sqrt{n^2\pi^2} = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

aber divergent. Damit besitzt der Differenzenquotient keinen rechtsseitigen Grenzwert (für $x \to 0+$), und f ist in a nicht differenzierbar.