MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Klausur
13.02.2016

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

1. a)
   - Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen definiere man den Begriff „Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$“. (1)
   - Für ein fest gewähltes $a > 0$ zeige man anhand der Definition, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

     $$a_n = \frac{a \cdot \sqrt[3]{n}}{a + \sqrt[3]{n}} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

     den Grenzwert a besitzt. (2)

   b)
   - Für eine monoton fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formuliere man den „Hauptsatz über monotone Folgen“. (1)
   - Man zeige, daß die durch

     $$a_1 = 2 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^3}{9} + 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

     rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. (2)

2. a) Man zeige, daß die Reihe

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(2n)!}$$

   für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert. (2)

   b) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, e^{-nx}$$

   konvergiert. (2)

   c) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \arctan x\right)^n$$

   konvergiert, und berechne hierfür ihre Summe. (2)

3. a)
- Man formuliere den Nullstellensatz. (1)
- Man zeige, daß für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $a < b$, die der Bedingung

$$a < f(x) < b \qquad \text{für alle} \qquad x \in [a, b]$$

genügt, (mindestens) ein $\xi \in \,]a, b[$ mit $f(\xi) = \xi$ existiert. (2)

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{2016} + 2016\, x^2 + 1.$$

- Man bestimme den Wertebereich W_f von f. (2)
- Man entscheide mit Begründung, ob f umkehrbar ist. (1)

4. a) Man betrachte eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie $a \in \mathbb{R}$.
- Man definiere die Begriffe „f ist stetig im Punkt a“ und „f ist differenzierbar im Punkt a“. (1)
- Man zeige: Ist f in a differenzierbar, so ist f in a auch stetig. (2)

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{falls } x > 0, \\ \sin x, & \text{falls } x \le 0. \end{cases}$$

- Man bestimme alle Punkte $a \in \mathbb{R}$, in denen f stetig ist. $(1\frac{1}{2})$
- Man bestimme alle Punkte $a \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist. $(1\frac{1}{2})$