

Tutorium zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

49. a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{e^x + 1} = \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1};$$

aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion \exp ergibt sich, daß auch die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = e^x \cdot e,$$

und

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = e^x + 1,$$

und damit ihr Quotient $f = \frac{f_1}{f_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt aufgrund des Monotonieverhaltens der Exponentialfunktion \exp zunächst $e^{x_1} < e^{x_2}$ und damit

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{e^{x_1} e}{e^{x_1} + 1} - \frac{e^{x_2} e}{e^{x_2} + 1} = \frac{e^{x_1} e (e^{x_2} + 1) - e^{x_2} e (e^{x_1} + 1)}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)} = \\ &= \frac{e}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)} (e^{x_1} (e^{x_2} + 1) - e^{x_2} (e^{x_1} + 1)) = \\ &= \frac{e}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)} ((e^{x_1} e^{x_2} + e^{x_1}) - (e^{x_2} e^{x_1} + e^{x_2})) = \\ &= \frac{e}{\underbrace{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)}_{>0}} \cdot \underbrace{(e^{x_1} - e^{x_2})}_{<0} < 0, \end{aligned}$$

also $f(x_1) < f(x_2)$; damit ist f streng monoton wachsend.

b) Wegen

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

ergibt sich

$$f(x) = \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{0 \cdot e}{0 + 1} = 0$$

sowie

$$f(x) = \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1} = \frac{e}{1 + \frac{1}{e^x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{1 + 0} = e.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt ferner $0 < e^x \cdot e < (e^x + 1) \cdot e$ und damit

$$0 < f(x) = \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1} < e,$$

woraus sich zunächst $W_f \subseteq]0, e[$ ergibt; zum Nachweis von „ \supseteq “ sei nun $y \in]0, e[$. Wegen $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) < y$, und wegen $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$ gibt es ein $b > 0$ mit $f(b) > y$; nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = y$. Insgesamt gilt also $W_f =]0, e[$.

- c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und damit insbesondere umkehrbar. Zur Berechnung der Umkehrfunktion $f^{-1} :]0, e[\rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir ein $y \in]0, e[$; dabei gilt

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1} = y \iff e^x \cdot e = y(e^x + 1) \iff \\ &\iff e \cdot e^x = y \cdot e^x + y \iff (e - y) \cdot e^x = y \iff_{e-y \neq 0} \\ &\iff e^x = \frac{y}{e - y} \iff_{\frac{y}{e-y} > 0} x = \ln \frac{y}{e - y}, \end{aligned}$$

so daß sich für die Umkehrfunktion

$$f^{-1} :]0, e[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \ln \frac{y}{e - y},$$

ergibt.

50. a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wegen $e^{-nx} = (e^{-x})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ handelt es sich bei der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ um die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = e^{-x}$; diese konvergiert aber genau für $|q| < 1$. Wegen

$$|q| < 1 \iff |e^{-x}| < 1 \iff e^{-x} < 1 \iff -x < 0 \iff x > 0$$

konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ genau für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$; es ist $D = \mathbb{R}^+$.

- b) Für alle $x \in D$ gilt gemäß der Summenformel für geometrische Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

51. a) Das maximale Definitionsgebiet D von f umfaßt genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für die beide auftretenden Argumente des natürlichen Logarithmus positiv sind. Wegen

	-4	2	
$x + 4$	-	0	+
$x - 2$	-		-
$\frac{x+4}{x-2}$	+	0	-
			+

ist $D_1 =]-\infty, -4[\cup]2, \infty[$, und wegen

	-1	3	
$x - 3$	-	0	-
$x + 1$	-		+
$\frac{x-3}{x+1}$	+	0	-
			+

ist $D_2 =]-\infty, -1[\cup]3, \infty[$; folglich ergibt sich

$$D = D_1 \cap D_2 =]-\infty, -4[\cup]3, \infty[= \mathbb{R} \setminus [-4, 3].$$

b) Für alle $x \neq 0$ ist

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{1 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+0}{1-0} = 1$$

sowie

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{1 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-0}{1+0} = 1;$$

mit der Stetigkeit des natürlichen Logarithmus \ln ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\ln \frac{x+4}{x-2} - \ln \frac{x-3}{x+1} - 2 \ln 3 \right) = \\ &= \ln 1 - \ln 1 - 2 \ln 3 = 0 - 0 - 2 \ln 3 = -2 \ln 3. \end{aligned}$$

Des weiteren ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} \left(\ln \underbrace{\frac{x+4}{x-2}}_{\rightarrow 0^+} - \ln \underbrace{\frac{x-3}{x+1}}_{\rightarrow \frac{7}{3}} - 2 \ln 3 \right) = -\infty$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\ln \underbrace{\frac{x+4}{x-2}}_{\rightarrow 7} - \ln \underbrace{\frac{x-3}{x+1}}_{\rightarrow 0^+} - 2 \ln 3 \right) = +\infty.$$

c) Für alle $x \in D$ mit $f(x) = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \ln \frac{x+4}{x-2} - \ln \frac{x-3}{x+1} = 2 \ln 3 &\implies \ln \frac{(x+4)(x+1)}{(x-2)(x-3)} = \ln 9 \implies \\ \frac{(x+4)(x+1)}{(x-2)(x-3)} = 9 &\implies x^2 + 5x + 4 = 9(x^2 - 5x + 6) \implies \\ 8x^2 - 50x + 50 = 0 &\implies 4x^2 - 25x + 25 = 0 \implies \\ x = \frac{1}{2 \cdot 4} \left(-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25} \right) &= \frac{25 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{25 \pm 15}{8} \end{aligned}$$

Damit ist $x = 5$ oder $x = \frac{5}{4}$, und wegen $\frac{5}{4} \notin D$ gilt $x = 5$. Wegen

$$f(5) = \ln \frac{5+4}{5-2} - \ln \frac{5-3}{5+1} - 2 \ln 3 = \ln 3 - \underbrace{\ln \frac{1}{3}}_{=-\ln 3} - 2 \ln 3 = 0$$

ist $x = 5$ die einzige Nullstelle von f .

52. Für alle $x, y > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln \frac{x+y}{2} &\iff \ln x + \ln y \leq 2 \ln \frac{x+y}{2} \iff \\
 &\iff \ln(x \cdot y) \leq \ln \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \stackrel{(*)}{\iff} x \cdot y \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \iff \\
 &\iff xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \iff 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2 \iff \\
 &\iff 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \iff 0 \leq (x-y)^2;
 \end{aligned}$$

dabei geht bei der Umformung (*) ein, daß sowohl die Exponentialfunktion \exp (für „ \implies “) als auch die Logarithmusfunktion \ln (für „ \iff “) monoton wachsend sind. Da nun die Ungleichung $0 \leq (x-y)^2$ für alle $x, y > 0$ erfüllt ist, erhält man über die Kette von Äquivalenzumformungen („ \iff “), daß auch die zu beweisende Ungleichung

$$\frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln \frac{x+y}{2}$$

für alle $x, y > 0$ gilt.

Es sei bemerkt, daß zur vollständigen Lösung bereits die Implikationsrichtung „ \iff “ ausreichend ist; man kann dann wie folgt argumentieren: für alle $x, y > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 0 \leq (x-y)^2 &\implies 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \implies 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2 \implies \\
 &\implies x \cdot y \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \underset{\ln \text{ monoton wachsend}}{\implies} \ln(x \cdot y) \leq \ln \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \implies \\
 &\implies \ln x + \ln y \leq 2 \ln \frac{x+y}{2} \implies \frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln \frac{x+y}{2}.
 \end{aligned}$$