

**Tutorium zur Vorlesung
„Differential- und Integralrechnung I“
— Bearbeitungsvorschlag —**

41. a) Die Funktion f ist als Summe, Produkt und Komposition stetiger Funktionen selbst stetig; genauer gilt:

- Zunächst sind die Polynomfunktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x,$$

und

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = x^3 + x + 1,$$

und

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) = x^4 + 1,$$

sowie die Betragsfunktion

$$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_4(x) = |x|,$$

und die Wurzelfunktion

$$f_5 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_5(x) = \sqrt{x},$$

stetig.

- Damit sind die Kompositionen

$$f_6 = f_4 \circ f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_6(x) = f_4(f_2(x)) = |x^3 + x + 1|,$$

und

$$f_7 = f_5 \circ f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_7(x) = f_5(f_3(x)) = \sqrt{x^4 + 1},$$

stetig.

- Damit ist nun das Produkt

$$f_8 = f_1 \cdot f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_8(x) = f_1(x) \cdot f_6(x) = x \cdot |x^3 + x + 1|,$$

stetig.

- Damit ist schließlich die Summe

$$f = f_8 + f_7 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = f_8(x) + f_7(x) = x \cdot |x^3 + x + 1| + \sqrt{x^4 + 1}$$

stetig.

b) Wegen

$$f(-2) = (-2) \cdot |(-2)^3 + (-2) + 1| + \sqrt{(-2)^4 + 1} = -18 + \sqrt{17} < 0$$

und

$$f(-1) = (-1) \cdot |(-1)^3 + (-1) + 1| + \sqrt{(-1)^4 + 1} = -1 + \sqrt{2} > 0$$

besitzt die gemäß a) stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nach dem Nullstellensatz (mindestens) eine Nullstelle im Intervall $] -2, -1[$ der Intervalllänge 1.

c) Wegen

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left| \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 \right| + \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^4 + 1} = -\frac{93}{16} + \frac{1}{4}\sqrt{97} < 0$$

muß (wiederum nach dem Nullstellensatz) im Intervall $] -\frac{3}{2}, -1[$ der Länge $\frac{1}{2}$ eine Nullstelle von f liegen.

42. a) Wir betrachten die Funktion

$$h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - g(x);$$

damit ist $h = f - g$ als Differenz stetiger Funktionen stetig, und wegen

$$h(a) = f(a) - g(a) < 0 \quad \text{und} \quad h(b) = f(b) - g(b) > 0$$

existiert nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in]a, b[$ mit $h(\xi) = 0$; damit gilt aber $\eta = f(\xi) = g(\xi)$, und $S = (\xi, \eta)$ ein Schnittpunkt der Graphen G_f und G_g .

b) Die Funktionen

$$f : [-1, 1], \quad f(x) = 2x + 1, \quad \text{und} \quad g : [-1, 1], \quad g(x) = x^2,$$

sind als Polynomfunktionen insbesondere stetig, und es gilt

$$f(-1) = -1 < 1 = g(-1) \quad \text{sowie} \quad f(1) = 3 > 1 = g(1).$$

Für $\xi \in]-1, 1[$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\xi) = g(\xi) &\iff 2\xi + 1 = \xi^2 \iff 2 = \xi^2 - 2\xi + 1 \iff \\ &\iff (\xi - 1)^2 = 2 \iff_{\xi - 1 < 0} \xi - 1 = -\sqrt{2} \iff \xi = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Wegen $\eta = f(\xi) = 2\xi + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$ ist $(1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$ der einzige Schnittpunkt der beiden Graphen G_f und G_g .

c) Aus der Stetigkeit der linearen Funktion

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x,$$

und der Polynomfunktion

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = x^4 + 1,$$

sowie der Wurzelfunktion

$$f_3 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sqrt{x},$$

ergibt sich die Stetigkeit der Komposition

$$f_4 = f_3 \circ f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_4(x) = f_3(f_2(x)) = \sqrt{x^4 + 1},$$

sowie der Differenzfunktion

$$f = f_1 - f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = f_1(x) - f_4(x) = x - \sqrt{x^4 + 1};$$

des weiteren ist die quadratische Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 - 2,$$

stetig.

- Wegen

$$f(-1) = -1 - \sqrt{2} < -1 = g(-1) \quad \text{und} \quad f(0) = -1 > -2 = g(0)$$

besitzen G_f und G_g gemäß a) in $] -1, 0[$ (mindestens) einen Schnittpunkt.

- Wegen

$$f(1) = 1 - \sqrt{2} > -1 = g(1) \quad \text{und} \quad f(2) = 2 - \sqrt{17} < 2 = g(2)$$

besitzen G_f und G_g analog zu a) in $] 1, 2[$ (mindestens) einen Schnittpunkt.

Damit besitzen die beiden Graphen G_f und G_g mindestens zwei Schnittpunkte.

43. Die Lösungen der zu betrachtenden Gleichung

$$\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c} = 0$$

entsprechen genau den Nullstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c};$$

diese ist zunächst als gebrochenrationale Funktion stetig. Wegen

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x-a}}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{\frac{2}{x-b}}_{\rightarrow \frac{2}{a-b}} + \underbrace{\frac{3}{x-c}}_{\rightarrow \frac{3}{a-c}} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} +\infty$$

gibt es ein $\alpha \in]a, b[$ mit $f(\alpha) > 0$, und wegen

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x-a}}_{\rightarrow \frac{1}{b-a}} + \underbrace{\frac{2}{x-b}}_{\rightarrow -\infty} + \underbrace{\frac{3}{x-c}}_{\rightarrow \frac{3}{b-c}} \xrightarrow{x \rightarrow b^-} -\infty$$

gibt es ein $\beta \in]\alpha, b[$ mit $f(\beta) < 0$; damit existiert aber nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in]\alpha, \beta[\subseteq]a, b[$ mit $f(\xi) = 0$. Die entsprechende Argumentation liefert dann auch ein $\zeta \in]b, c[$ mit $f(\zeta) = 0$.

44. a) Wir betrachten eine stetige Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in [-1, 1].$$

Die Funktion f ist nach Voraussetzung stetig, und das Definitionsgebiet $D_f = [-1, 1]$ ist ein abgeschlossenes Intervall. Damit besitzt f nach dem Satz von Weierstraß ein globales Minimum $p \in [-1, 1]$ und ein globales Maximum $q \in [-1, 1]$, und es gilt $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ für alle $x \in [-1, 1]$. Es ist $p \in [-1, 1]$ und damit nach Voraussetzung $f(p) > 0$; wir wählen $\varepsilon = f(p) > 0$ und erhalten damit

$$f(x) \geq f(p) = \varepsilon \quad \text{für alle } x \in [-1, 1].$$

b) Wir geben jeweils ein geeignetes Gegenbeispiel an.

- Die Funktion

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{für } x \neq 0, \\ 1, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \neq 0} |x| = \lim_{| \cdot | \text{ stetig}} |0| = 0 \neq 1 = f(0)$$

an der Stelle $a = 0$ unstetig, und es gilt

$$f(x) = \begin{cases} |x| > 0, & \text{für } x \neq 0, \\ 1 > 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

insgesamt also $f(x) > 0$ für alle $x \in [-1, 1]$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist aber

$$x = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, 1 \right\} \in]0, 1], \quad \text{insbesondere also } x \in [-1, 1],$$

mit

$$f(x) = |x| = x \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

- Die Funktion

$$f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1,$$

ist (als lineare Funktion) stetig, und es gilt

$$f(x) = x + 1 \underset{x > -1}{>} (-1) + 1 = 0 \quad \text{für alle } x \in]-1, 1[.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist aber

$$x = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2} - 1, 0 \right\} \in]-1, 0], \quad \text{insbesondere also } x \in]-1, 1[,$$

mit

$$f(x) = x + 1 \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} - 1 \right) + 1 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$