

Tutorium zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

37. Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

- Die Einschränkung $f|_{]-\infty; -1[}$ von f auf das Intervall $]-\infty; -1[$ ist als lineare Funktion insbesondere stetig, weswegen f in allen Punkten $a \in]-\infty; -1[$ stetig ist: bei $x \rightarrow a$ ist nämlich schließlich auch $x \in]-\infty; -1[$ und damit

$$f(x) = \lambda x + \mu \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda a + \mu = f(a).$$

- Die Einschränkung $f|_{]-1; 1[}$ von f auf das Intervall $]-1; 1[$ ist als quadratische Funktion insbesondere stetig, weswegen f in allen Punkten $a \in]-1; 1[$ stetig ist: bei $x \rightarrow a$ ist nämlich schließlich auch $x \in]-1; 1[$ und damit

$$f(x) = x^2 + \lambda \mu x + 1 \xrightarrow{x \rightarrow a} a^2 + \lambda \mu a + 1 = f(a).$$

- Die Einschränkung $f|_{]1; \infty[}$ von f auf das Intervall $]1; \infty[$ ist als lineare Funktion insbesondere stetig, weswegen f in allen Punkten $a \in]1; \infty[$ stetig ist: bei $x \rightarrow a$ ist nämlich schließlich auch $x \in]1; \infty[$ und damit

$$f(x) = \mu x + \lambda \xrightarrow{x \rightarrow a} \mu a + \lambda = f(a).$$

Wegen

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2 + \lambda \mu x + 1) = 2 - \lambda \mu = f(-1)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (\lambda x + \mu) = -\lambda + \mu;$$

damit ist f im Punkt $a = -1$ genau dann stetig, wenn

$$2 - \lambda \mu = -\lambda + \mu$$

gilt. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (\mu x + \lambda) = \mu + \lambda;$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 + \lambda \mu x + 1) = 2 + \lambda \mu = f(1)$$

damit ist f im Punkt $a = 1$ genau dann stetig, wenn

$$\mu + \lambda = 2 + \lambda \mu$$

gilt. Die Funktion f ist also genau dann stetig, wenn

$$2 - \lambda\mu = -\lambda + \mu \quad \text{und} \quad \mu + \lambda = 2 + \lambda\mu$$

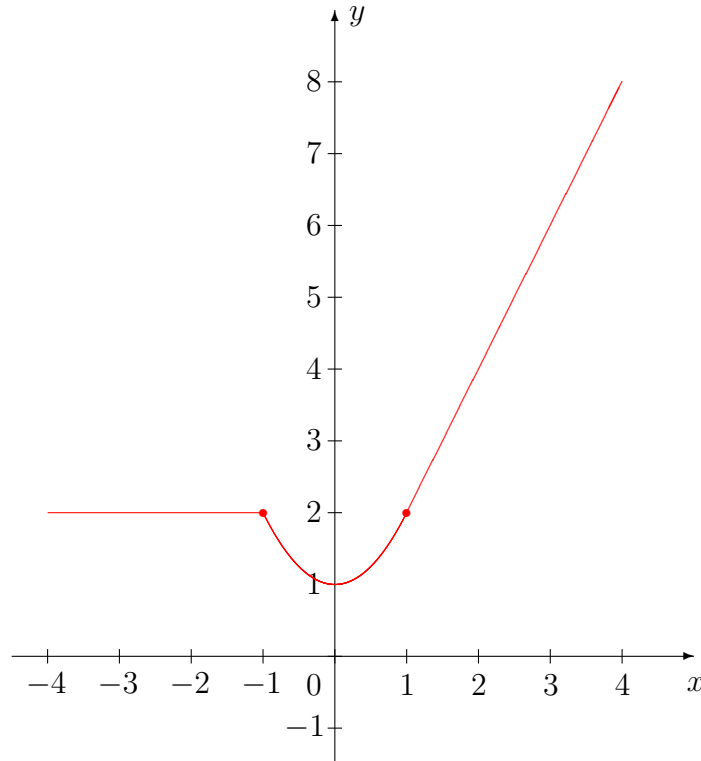
gilt. Aus beiden Gleichungen zusammen folgt

$$2 + \lambda - \mu = \lambda\mu = \mu + \lambda - 2,$$

also $\mu = 2$ und $\lambda = 0$; umgekehrt erfüllt das Paar $(\lambda, \mu) = (0, 2)$ beide Gleichungen.

Die also genau im Falle $(\lambda, \mu) = (0, 2)$ stetige Funktion lautet

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2, & \text{für } x < -1, \\ x^2 + 1, & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ 2x, & \text{für } 1 < x. \end{cases}$$



38. Sei $a \in \mathbb{R}$; wir treffen die folgende Fallunterscheidung:

- Fall 1: $a \in \mathbb{Q}$; es ist also $f(a) = 1$. Für die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist aber $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und damit $f(x_n) = 0$, woraus sich $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \neq f(a)$ ergibt.
- Fall 2: $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; es ist also $f(a) = 0$. Gemäß Tutoriumsaufgabe 4 gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Wegen $f(x_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich also $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 \neq f(a)$.

Folglich ist f in a unstetig.

39. Nach Voraussetzung ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion; es gibt also ein $M > 0$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ergibt sich

$$|g(x_n)| = |x_n f(x_n)| = |x_n| \cdot |f(x_n)| \leq |x_n| \cdot M \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

nach dem Schrankenlemma folgt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 0 = 0 \cdot f(0) = g(0).$$

Damit ist aber die Stetigkeit der Funktion g im Punkt $a = 0$ gezeigt.

40. a) Die Aussage ist wahr. Da $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv ist, gilt für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ dann $f(x_1) \neq f(x_2)$. Wegen $D_0 \subseteq D$ gilt auch für alle $x_1, x_2 \in D_0$ mit $x_1 \neq x_2$ dann $f_0(x_1) \neq f_0(x_2)$, also ist auch $f_0 : D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv.
- b) Die Aussage ist falsch; wir widerlegen dies mit einem Gegenbeispiel. Sei dazu $f_0 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = x^2$. Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ mit $f_0(x_1) = f_0(x_2)$; damit ist $x_1^2 = x_2^2$ und folglich gilt wegen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ schon $x_1 = x_2$, also ist $f_0 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv. Hingegen ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, wegen $f(-1) = 1 = f(1)$ und $x_1 = -1 \neq 1 = x_2$ nicht injektiv.
- c) Die Aussage ist falsch; wir widerlegen dies mit einem Gegenbeispiel. Sei dazu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Sei $y \in \mathbb{R}$; damit ist $x = y$, woraus sich $f(x) = x = y$ ergibt, also ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ surjektiv. Hingegen ist $f_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = x$, wegen $-1 \notin f_0(\mathbb{R}^+)$ nicht surjektiv.
- d) Die Aussage ist wahr. Da $f_0 : D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ surjektiv ist, gibt es für jedes $y \in \mathbb{R}$ (mindestens) ein $x \in D_0$ mit $f_0(x) = y$. Wegen $D_0 \subseteq D$ gibt es auch für jedes $y \in \mathbb{R}$ (mindestens) ein $x \in D$ mit $f(x) = y$, also ist auch $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ surjektiv.
- e) Die Aussage ist wahr. Da $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D_0$ stetig ist, gilt für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ schon $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$. Wegen $a \in D_0 \subseteq D$ gilt für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D_0 mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ schon $\lim_{n \rightarrow \infty} f_0(x_n) = f_0(a)$, also ist auch $f_0 : D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D_0$ stetig.
- f) Die Aussage ist falsch; wir widerlegen dies mit einem Gegenbeispiel. Sei dazu $f_0 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = x + 1$; es ist f_0 als lineare Funktion stetig auf \mathbb{R}_0^+ und damit insbesondere auch im Punkt $a = 0$. Hingegen ist ihre Fortsetzung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{für } x \geq 0, \\ x, & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

in $a = 0$ nicht stetig, denn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^- mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, also ist $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$. Es würde hierfür auch die Betrachtung einer geeigneten Folge genügen: so gilt etwa für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = -\frac{1}{n}$ zum einen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ und zum anderen $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x_n < 0} x_n = 0 \neq 1 = f(0)$.