MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 9
14.12.2015

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

33. In Abhängigkeit von den reellen Parametern a, $b > 0$ mit $b \neq 1$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \qquad \text{mit} \qquad c_n = \frac{a^n}{1-b^n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten; dabei ist

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{1-b^{n+1}} \cdot \frac{1-b^n}{a^n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \frac{1-b^n}{1-b^{n+1}}\right| \underset{a>0}{=} a \cdot \left|\frac{1-b^n}{1-b^{n+1}}\right|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Fall 1: $0 < b < 1$. Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} b^{n+1} = 0$, woraus sich

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = a \cdot \left|\frac{1-b^n}{1-b^{n+1}}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \cdot \left|\frac{1-0}{1-0}\right| = a$$

  ergibt; nach dem Quotientenkriterium ist also die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ für $0 < a < 1$ konvergent sowie für $a > 1$ divergent. Für $a = 1$ ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß

$$c_n = \frac{a^n}{1-b^n} = \frac{1^n}{1-b^n} = \frac{1}{1-b^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-0} = 1$$

  keine Nullfolge und damit insbesondere die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent.

- Fall 2: $b > 1$. Damit ist $0 < \frac{1}{b} < 1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^n = 0$, woraus sich

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = a \cdot \left|\frac{1-b^n}{1-b^{n+1}}\right| = a \cdot \left|\frac{b^n \cdot \left(\frac{1}{b^n} - 1\right)}{b^n \cdot \left(\frac{1}{b^n} - b\right)}\right| =$$

$$= a \cdot \left|\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{b}\right)^n - b}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \cdot \left|\frac{0-1}{0-b}\right| = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

  ergibt; nach dem Quotientenkriterium ist also die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ für $\frac{a}{b} < 1$, also für $a < b$, konvergent sowie für $\frac{a}{b} > 1$, also für $a > b$, divergent. Für $\frac{a}{b} = 1$, also für $a = b$ ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß

$$c_n = \frac{a^n}{1-b^n} = \frac{b^n}{1-b^n} = \frac{b^n}{b^n \cdot \left(\frac{1}{b^n} - 1\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^n - 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{0-1} = -1$$

keine Nullfolge und damit insbesondere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent.

34. Für die zu betrachtende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gilt

$$a_n = \frac{1 + 2^n x^{2n}}{1+n^2} = \frac{1}{1+n^2} + \frac{2^n x^{2n}}{1+n^2},$$

also

$$a_n = b_n + c_n \qquad \text{mit} \qquad b_n = \frac{1}{1+n^2} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{2^n x^{2n}}{1+n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$|b_n| = \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist daher nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent; folglich konvergiert nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert.

Für $x = 0$ ist $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, und für $x \neq 0$ ergibt sich

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1} x^{2(n+1)}}{1+(n+1)^2} \cdot \frac{1+n^2}{2^n x^{2n}}\right| = \left|\frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{x^{2n+2}}{x^{2n}} \cdot \frac{1+n^2}{1+(n+1)^2}\right| =$$
$$= \left|2 \cdot x^2 \cdot \frac{\frac{1}{n^2}+1}{\frac{1}{n^2} + (1+\frac{1}{n})^2}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 \cdot x^2 \cdot \frac{0+1}{0+(1+0)^2} = 2x^2;$$

damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nach dem Quotientenkriterium

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $2x^2 < 1$ (absolut) konvergent, wegen

  $$2x^2 < 1 \iff x^2 < \frac{1}{2} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

  also für alle $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, sowie

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $2x^2 > 1$ divergent, wegen

  $$2x^2 > 1 \iff x^2 > \frac{1}{2} \iff |x| > \frac{1}{\sqrt{2}} \iff x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } \frac{1}{\sqrt{2}} < x$$

  also für alle $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right[$.

Für die verbleibenden Fälle $2x^2 = 1$, also $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, ergibt sich

$$c_n = \frac{2^n x^{2n}}{1+n^2} = \frac{(2x^2)^n}{1+n^2} = \frac{1^n}{1+n^2} = \frac{1}{1+n^2} = b_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent.

Zusammenfassend ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ und damit die gegebene Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent, wenn $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ gilt.

35. a) Eine gebrochenrationale Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners definiert; wegen $x - 1 = 0 \iff x = 1$ und $x^2 = 1 \iff x = \pm 1$ ist also $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

b) Für alle $x \in D$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{(x+1)-2}{x^2-1} = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1};$$

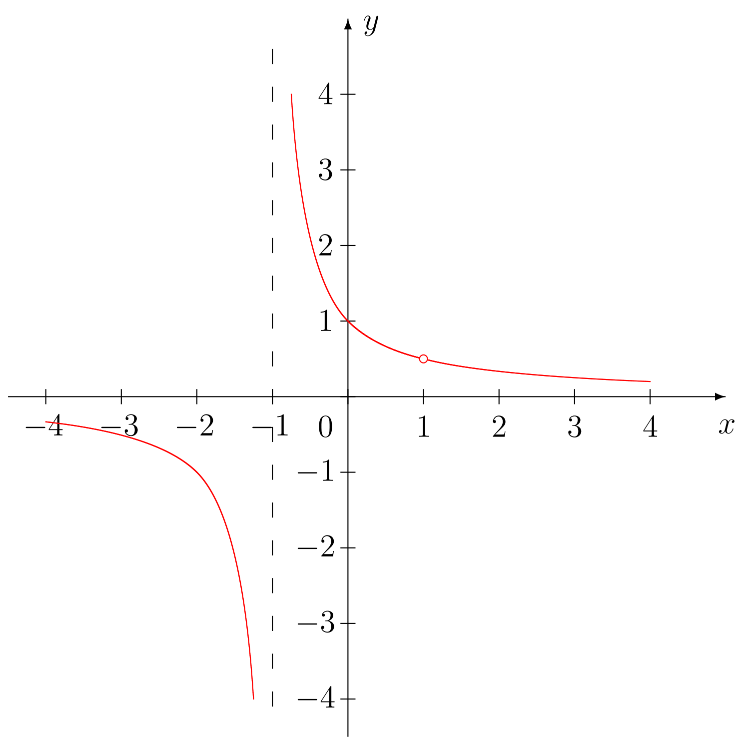
Damit ergibt sich

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

sowie

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} \frac{1}{x+1} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \frac{1}{x+1} = \infty$$

c) Unter Berücksichtigung der in a) und b) erzielten Ergebnisse ergibt sich für den Graphen G_f der Funktion f damit:



36. a) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1 + 2\,x + 3\,x^2}{x^2 + x + 1} = \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 3\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 3}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

sowie

$$g(x) = \frac{(x^3+1)^2}{(x^2+1)^3} = \frac{\left(x^3\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)\right)^2}{\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)^3} = \frac{x^6\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^2}{x^6\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^3} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^3}.$$

Damit gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 3}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0+0+3}{1+0+0} = 3$$

sowie

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^3} = \frac{(1+0)^2}{(1+0)^3} = 1.$$

b) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

und damit (wegen der Stetigkeit der Quadratwurzel)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

sowie

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1+0}} = -1.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} g(x) = x - \sqrt{x^2+1} &= \frac{\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \\ &= \frac{x^2 - \sqrt{x^2+1}^{\,2}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} = 0;$$

ferner ergibt sich

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \Bigg(\underbrace{x}_{\to-\infty} - \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to\infty}\Bigg) = -\infty.$$