MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 8
07.12.2015

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

29. Für die beiden Reihen in der ersten Zeile gilt:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\frac{4\,n^2}{2\,n^4+1} \leq \frac{4\,n^2}{2\,n^4} = \frac{2}{n^2}.$$
Mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ konvergent; damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\,n^2}{2\,n^4+1}$ die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\frac{3\,n^3}{2\,n^4-1} \geq \frac{3\,n^3}{2\,n^4} = \frac{3}{2\,n}.$$
Mit der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2\,n}$ divergent; damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\,n^3}{2\,n^4-1}$ die divergente Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2\,n}$ und ist folglich nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

Für die beiden Reihen in der zweiten Zeile gilt:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,n}.$$
Mit der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\,n}$ divergent; damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\,n^3}{2\,n^4-1}$ die divergente Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\,n}$ und ist folglich nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2}.$$
Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$ die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

30. Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit
$$a_n = \binom{2n}{n} x^n = \frac{(2n)! \cdot x^n}{n! \cdot n!}$$
für alle $n \in \mathbb{N}_0$; dabei ist $(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (2n)$. Für $x = 0$ ist also $a_0 = 1$ und $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; insbesondere ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, wobei für die Summe dieser Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$ gilt. Für $x \neq 0$ gilt
$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(2\,(n+1))! \cdot x^{n+1}}{(n+1)! \cdot (n+1)!} \cdot \frac{n! \cdot n!}{(2\,n)! \cdot x^n}\right| = \\ &= \left|\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \\ &= \frac{(2n+1)\,(2n+2)}{(n+1)(n+1)} \cdot |x| = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \cdot 2 \cdot |x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4\,|x|.\end{aligned}$$
Damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium

a) für $4\,|x| < 1$, also für $|x| < \frac{1}{4}$, (absolut) konvergent, sowie
b) für $4\,|x| > 1$, also für $|x| > \frac{1}{4}$, divergent.

Für den verbleibenden (und hier nicht zu betrachtenden) Fall $4\,|x| = 1$, also $|x| = \frac{1}{4}$, trifft das Quotientenkriterium keine Aussage.

31. Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n\right|} &= \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} |x|^n} = \\ &= \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} \cdot \sqrt[n]{|x|^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot |x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e\,|x|.\end{aligned}$$

Damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium

a) für $e\,|x| < 1$, also für $|x| < \frac{1}{e}$, (absolut) konvergent, sowie
b) für $e\,|x| > 1$, also für $|x| > \frac{1}{e}$, divergent.

Für den verbleibenden (und hier nicht zu betrachtenden) Fall $e\,|x| = 1$, also $|x| = \frac{1}{e}$, trifft das Wurzelkriterium keine Aussage.

32. a) Die Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel betrachte man etwa die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

sowie die Folge

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad b_n = (-1)^n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$$

die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (nach dem Leibnizschen Kriterium) konvergent und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offensichtlich beschränkt, die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ aber divergent.

b) Die Aussage ist richtig: die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bedeutet die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, und wegen der Beschränktheit der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine reelle Konstante $M > 0$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit gilt aber

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq M} \leq M \cdot |a_n| \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},$$

so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ die (wie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ebenfalls) konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} M\,|a_n|$ besitzt und folglich nach dem Majorantenkriterium selbst absolut konvergent ist.