

Tutorium zur Vorlesung
„Differential– und Integralrechnung I“
— Bearbeitungsvorschlag —

25. a) • Wir nehmen zum Widerspruch an, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ sei konvergent; da aber die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nach Voraussetzung konvergent ist, ist damit auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} ((a_n + b_n) - b_n)$, also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ divergent.

Entsprechend schließt man auf die Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)$.

• Wir nehmen zum Widerspruch an, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_n)$ sei konvergent; wegen $\lambda \neq 0$ ist $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}$, und damit ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot a_n)\right)$, also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_n)$ divergent.

b) • Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent; nach a) divergiert damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)$.

• Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{(n^2 + 1)^2}{n^6} = \frac{n^4 + 2n^2 + 1}{n^6} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^6};$$

da nun die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ konvergieren und gemäß

Vorlesung die Summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

besitzen, ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)^2}{n^6}$ konvergent, und für ihre Summe gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)^2}{n^6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^6}{945}.$$

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{(n^2+1)^2}{n^5} = \frac{n^4 + 2n^2 + 1}{n^5} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^5};$$

da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert und die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ konvergieren, ist nach a) auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)^2}{n^5}$ divergent.

26. Wir betrachten zuerst die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N};$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > 0$ mit

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}} = \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}}_{\leq 1} \leq 1, \quad \text{also} \quad a_{n+1} \leq a_n,$$

so daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Die (dazu) verdichtete Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m \cdot \frac{1}{2^m \sqrt{2^m}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^m}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m.$$

hat die Gestalt der geometrischen Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} q^m$ mit $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$; wegen $|q| < 1$ konvergiert die verdichtete Reihe und damit nach dem Cauchyschen Verdichtungskriterium auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Wir betrachten nun die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N};$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > 0$ mit

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{n(n+1)} &= \left(\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt[n+1]{n+1}}{n\sqrt[n]{n}}\right)^{n(n+1)} = \frac{(n+1)^{n(n+1)}(\sqrt[n+1]{n+1})^{n(n+1)}}{n^{n(n+1)}(\sqrt[n]{n})^{n(n+1)}} \\ &= \frac{(n+1)^{n(n+1)}(n+1)^n}{n^{n(n+1)}n^{n+1}} = \frac{(n+1)^{n(n+2)}}{n^{n(n+2)} \cdot n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n+2)} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n(n+2)} \cdot \frac{1}{n} \stackrel{(*)}{\geq} \left(1 + \frac{n(n+2)}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+3}{n} \geq 1 \end{aligned}$$

und damit auch

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1, \quad \text{also} \quad a_{n+1} \leq a_n,$$

so daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist, wobei für $(*)$ die Bernoullische Ungleichung eingeht. Für die (dazu) verdichtete Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m \cdot \frac{1}{2^m \sqrt[2^m]{2^m}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2^m]{2^m}}.$$

gilt wegen

$$\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{insbesondere} \quad \frac{1}{\sqrt[2^m]{2^m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1,$$

so daß die verdichtete Reihe damit nach dem Cauchyschen Verdichtungskriterium auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ divergiert.

27. Wir betrachten zuerst die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + \sqrt{n} + \sqrt{n}}}$$

mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n} + \sqrt{n}}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leq a_n = \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n} + \sqrt{n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

damit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gemäß dem Schrankenlemma eine Nullfolge.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq n+1$, wegen der Monotonie der Quadratwurzel $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$, zusammen also $n + \sqrt{n} \leq (n+1) + \sqrt{n+1}$, erneut wegen der Monotonie der Quadratwurzel also $\sqrt{n + \sqrt{n}} \leq \sqrt{n+1 + \sqrt{n+1}}$, und demnach insgesamt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n} + \sqrt{n}}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1 + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}}} = a_{n+1};$$

damit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend.

Insgesamt ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge, und daher konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ nach dem Leibnizkriterium. Wir betrachten nun die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}}$$

mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}} &= \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n})} = \\ &= \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}}{n + \sqrt{n} - n} = \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + 1 = \\ &= \sqrt{\frac{n + \sqrt{n}}{n}} + 1 = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + 0} + 1 = 2 \end{aligned}$$

ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und damit auch $((-1)^n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge, und daher divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

28. Für die gegebene Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen werden die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{a_n}{1 + a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

betrachtet; es bezeichne $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ bzw. $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$ die n -te Partialsumme.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dabei wegen

$$0 < a_n < 1 + a_n \quad \text{dann} \quad 0 < b_n = \frac{a_n}{1 + a_n} < 1$$

mit

$$\begin{aligned} b_n = \frac{a_n}{1 + a_n} &\iff (1 + a_n) b_n = a_n \iff b_n + a_n b_n = a_n \iff \\ &\iff b_n = a_n - a_n b_n \iff b_n = a_n (1 - b_n) \iff a_n = \frac{b_n}{1 - b_n}. \end{aligned}$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nach Voraussetzung konvergiert, ist die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ihrer Glieder eine Nullfolge; damit ergibt sich aber auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{1 - b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{0}{1 - 0} = 0.$$

Folglich gibt es insbesondere zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > n_0$ dann

$$|a_n - 0| < \varepsilon, \quad \text{also} \quad -1 < a_n < 1 \quad \text{und damit} \quad 0 < 1 + a_n < 2$$

gilt, und wegen

$$a_n = \underbrace{(1 + a_n)}_{<2} \cdot \underbrace{\frac{a_n}{1 + a_n}}_{>0} < 2 \cdot \frac{a_n}{1 + a_n} = 2b_n$$

ergibt sich

$$s_n = s_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^n a_k \leq s_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^n 2b_k = s_{n_0} + 2 \sum_{k=n_0+1}^n b_k \stackrel{b_k > 0}{\leq} s_{n_0} + 2t_n.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nach Voraussetzung konvergiert, ist die Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, es gibt also ein $K \in \mathbb{R}$ mit $t_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit gilt

$$s_n \leq s_{n_0} + 2t_n \leq s_{n_0} + 2K$$

für alle $n > n_0$, so daß die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls nach oben beschränkt ist und folglich die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nichtnegativer Glieder nach Satz 3.6 1) schon konvergiert.