

Tutorium zur Vorlesung
„Differential- und Integralrechnung I“
— Bearbeitungsvorschlag —

21. a) Wir zeigen die Formel für die Partialsummen mit vollständiger Induktion:
„ $n = 2$ “: Es ist

$$s_2 = a_2 = \frac{1}{2 \cdot (2^2 - 1)} = \frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot (2 + 1)}.$$

„ $n \rightarrow n + 1$ “: Es ist

$$\begin{aligned} s_{n+1} = s_n + a_{n+1} &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)((n+1)^2 - 1)} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n^2 + 2n)} = \frac{1}{4} + \frac{-(n+2) + 2}{2n(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{-n}{2n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

b) Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} \right) = \frac{1}{4}$$

ist die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 1)}$ als Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergent,

und für ihre Summe gilt $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{4}$.

22. a) Wir zeigen zunächst

$$\sum_{k=0}^n a_k = 4 - \frac{n+3}{2^n}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit vollständiger Induktion:

„ $n = 0$ “: Es ist

$$\sum_{k=0}^0 a_k = a_0 = \frac{0+1}{2^0} = 1 = 4 - \frac{0+3}{2^0}.$$

„ $n \rightarrow n + 1$ “: Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a_k &= \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) + a_{n+1} = \left(4 - \frac{n+3}{2^n} \right) + \frac{(n+1)+1}{2^{n+1}} = \\ &= 4 - \left(\frac{2(n+3)}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^{n+1}} \right) = 4 - \frac{n+4}{2^{n+1}} = 4 - \frac{(n+1)+3}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^n \cdot \frac{3n+5}{2^n} \right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit vollständiger Induktion:

„ $n = 0$ “: Es ist

$$\sum_{k=0}^0 (-1)^k a_k = (-1)^0 a_0 = \frac{0+1}{2^0} = 1 = \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^0 \cdot \frac{3 \cdot 0 + 5}{2^0} \right)$$

„ $n \rightarrow n+1$ “: Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k a_k &= \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \right) + (-1)^{n+1} \cdot a_{n+1} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^n \cdot \frac{3n+5}{2^n} \right) + (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)+1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^n \cdot \frac{3n+5}{2^n} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{9n+18}{2^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (-6n-10+9n+18) \right) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (3n+8) \right) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^{n+1} \cdot \frac{3(n+1)+5}{2^{n+1}} \right). \end{aligned}$$

b) Wir verwenden, daß $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Wegen

$$\sum_{k=0}^n a_k = 4 - \frac{n+3}{2^n} = 4 - \underbrace{\frac{n}{2^n}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{3}{2^n}}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4$$

ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, und für ihre Summe gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 4$.

Ferner ist wegen

$$\left| (-1)^n \cdot \frac{3n+5}{2^n} \right| = \frac{3n+5}{2^n} = 3 \cdot \underbrace{\frac{n}{2^n}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{5}{2^n}}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und damit

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = \frac{1}{9} \cdot \left(4 + \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{3n+5}{2^n}}_{\rightarrow 0} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{9}$$

die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent, und für ihre Summe gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \frac{4}{9}.$$

23. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ handelt es sich bei der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^n}$$

um eine geometrische Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c q^n \quad \text{mit} \quad c = x+3 \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{x-3};$$

diese konvergiert aber genau für $c = 0$ oder $|q| < 1$ und besitzt dann die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c q^n = \frac{c}{1-q}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} |q| < 1 &\iff \frac{1}{|x-3|} < 1 \iff 1 < |x-3| \iff \\ &\iff x-3 < -1 \text{ oder } x-3 > 1 \iff x < 2 \text{ oder } x > 4 \end{aligned}$$

konvergiert also die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^n}$$

genau für alle

$$x \in]-\infty, 2[\cup]4, \infty[= \mathbb{R} \setminus [2, 4],$$

und für die Summe der Reihe gilt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^n} = \frac{x+3}{1 - \frac{1}{x-3}} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3) - 1} = \frac{x^2 - 9}{x-4}.$$

24. Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ergibt sich notwendig, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Reihenglieder eine Nullfolge ist; damit ist aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

weswegen die Folge $\left(\frac{1}{1+a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ insbesondere keine Nullfolge ist und damit die

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}$ sicher divergiert.