MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 5
16.11.2015

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

17. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2\right) = n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{2z}{n} + \frac{z^2}{n^2}\right)\right) =$$
$$= n \cdot \left(-\frac{2z}{n} - \frac{z^2}{n^2}\right) = -2z - \frac{z^2}{n};$$

damit ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right) = \lim_{n\to\infty} \left(-2z - \frac{z^2}{n}\right) = -2z.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2n+2} = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2n} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2 = \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right]^2 \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2;$$

mit Hilfe des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

ergibt sich damit

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2n+2} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right]^2 \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2 =$$
$$= \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right]^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2 = e^{2z} \cdot 1^2 = e^{2z}.$$

c) Für $z = 0$ ergibt sich

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{0}{n}\right)^{2k} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Für $z \neq 0$ gilt $q = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2 \neq 1$ für alle $n \geq |z| > 0$, und mit der geometrischen Summenformel ergibt sich

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2k} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1}{n} \cdot q \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1}{n} \cdot q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} =$$
$$= \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2n}}{1 - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2} = \frac{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^2 - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2n+2}}{n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2\right)}.$$

Nach a) gilt für den Nenner

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\left(1+\frac{z}{n}\right)^2\right) = -2z,$$

und nach b) ist im Zähler

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^{2\,n+2} = e^{2z};$$

damit erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{z}{n}\right)^2-\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2n+2}}{n\cdot\left(1-\left(1+\frac{z}{n}\right)^2\right)} = \frac{1-e^{2z}}{-2z} = \frac{e^{2z}-1}{2z}.$$

18. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n\cdot(1+(-1)^n)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ ergibt sich

$$a_n = \begin{cases} (2\,k-1)\cdot\left(1+(-1)^{2k-1}\right) = 0, & \text{falls } n = 2\,k-1 \text{ ungerade,} \\ 2\,k\cdot\left(1+(-1)^{2k}\right) = 4\,k, & \text{falls } n = 2\,k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Damit gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = +\infty$, so daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Häufungspunkt $b=0$ besitzt.

Für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\cdot\sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right)\right)^n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ ergibt sich

$$\sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin\left(\frac{4\,k\,\pi}{2}\right) = \sin(2\,k\,\pi) = 0, & \text{falls } n = 4\,k, \\ \sin\left(\frac{(4\,k-1)\,\pi}{2}\right) = \sin\left(2\,k\,\pi-\frac{\pi}{2}\right) = -1, & \text{falls } n = 4\,k-1, \\ \sin\left(\frac{(4\,k-2)\,\pi}{2}\right) = \sin(2\,k\,\pi-\pi) = 0, & \text{falls } n = 4\,k-2, \\ \sin\left(\frac{(4\,k-3)\,\pi}{2}\right) = \sin\left(2\,k\,\pi-\frac{3\pi}{2}\right) = 1, & \text{falls } n = 4\,k-3, \end{cases}$$

und damit

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\cdot\sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right)\right)^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 4\,k, \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^n, & \text{falls } n = 4\,k-1, \\ 1, & \text{falls } n = 4\,k-2, \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, & \text{falls } n = 4\,k-3. \end{cases}$$

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt wegen

$$\lim_{k\to\infty} b_{4k} = \lim_{k\to\infty} b_{4k-2} = 1 \quad \text{sowie} \quad \lim_{k\to\infty} b_{4k-1} = \frac{1}{e} \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} b_{4k-3} = e$$

die drei Häufungspunkte $c_1 = 1$ sowie $c_2 = \frac{1}{e}$ und $c_3 = e$.

Da durch die Betrachtung der Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_{4k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{4k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{4k-2})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_{4k-3})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alle Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfasst werden, gibt somit genau die oben bestimmten (und keine weiteren) Häufungspunkte.

19. Sei c Grenzwert einer konvergenten Teilfolge der gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen; sei etwa $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ diese Teilfolge mit

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = c.$$

Folglich gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}^2 = c^2;$$

dabei ist $\left(a_{n_k}^2\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der sogar als konvergent vorausgesetzten Folge $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen. Damit erhalten wir

$$c^2 = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}^2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = a^2,$$

woraus sich aber sofort $c = a$ oder $c = -a$ ergibt.

20. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen zunächst $a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell} \geq \frac{1}{2}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$: es gilt zum einen

$$a_{2^{\ell+1}} = \sum_{k=1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^\ell} + \frac{1}{2^\ell + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{\ell+1}}$$

und anderen

$$a_{2^\ell} = \sum_{k=1}^{2^\ell} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^\ell},$$

insgesamt also

$$a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2^\ell+1}}_{\geq \frac{1}{2^{\ell+1}}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{\ell+1}}}_{\geq \frac{1}{2^{\ell+1}}}}_{\text{insgesamt } 2^\ell \text{ Summanden}} \geq 2^\ell \cdot \frac{1}{2^{\ell+1}} = \frac{1}{2}.$$

Wir folgern nun, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge ist. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dabei eine Cauchyfolge, wenn die Aussage

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, m, n \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

gilt; die Negation der Aussage lautet damit

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, m, n \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| \geq \varepsilon.$$

Sei nun $\varepsilon = \frac{1}{2}$; für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $2^\ell > n_0$, und mit $m = 2^\ell \geq n_0$ und $n = 2^{\ell+1} \geq n_0$ gilt dann $|a_n - a_m| = |a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell}| = a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell} \underset{\text{s.o.}}{\geq} \frac{1}{2} = \varepsilon.$