

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

13. Seien die reellen Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Für einen beliebigen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir die durch

$$a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + \beta \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- a) Wir zeigen für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die explizite Darstellung ihrer Folgenglieder

$$a_n = \alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

mit vollständiger Induktion:

- „ $n = 1$ “: Es ist

$$a_1 = a_{0+1} = \alpha \cdot a_0 + \beta = \alpha \cdot a_0 + \beta \cdot \alpha^0 = \alpha^1 \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{1-1} \alpha^k.$$

- „ $n \rightarrow n + 1$ “: Es ist

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \alpha \cdot a_n + \beta \\ &= \alpha \cdot \left(\alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \right) + \beta \\ &= \alpha \cdot \alpha^n \cdot a_0 + \alpha \cdot \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k + \beta \\ &= \alpha^{n+1} \cdot a_0 + \beta \cdot \left(\alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k + 1 \right) \\ &= \alpha^{n+1} \cdot a_0 + \beta \cdot \left(\sum_{k=1}^n \alpha^k + \alpha^0 \right) \\ &= \alpha^{n+1} \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^n \alpha^k. \end{aligned}$$

- b) Wir bestimmen nun die Werte von α , β und a_0 , für welche die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und treffen dazu folgenden Fallunterscheidung für $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Fall 1: Für $\alpha = 1$ ist

$$a_n = 1^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = a_0 + n \cdot \beta$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann konvergent, wenn $\beta = 0$ ist, und wir erhalten die konstante Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = a_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; für diese gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$.

- Fall 2: Für $\alpha \neq 1$ ergibt sich mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} = \\ &= \alpha^n \cdot a_0 + \frac{\beta}{1 - \alpha} - \frac{\beta}{1 - \alpha} \cdot \alpha^n = \alpha^n \cdot \left(a_0 - \frac{\beta}{1 - \alpha} \right) + \frac{\beta}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Ist zum einen der Startwert $a_0 = \frac{\beta}{1 - \alpha}$, so erhalten wir die konstante Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\beta}{1 - \alpha}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; für diese gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\beta}{1 - \alpha}$.
Ist zum anderen der Startwert $a_0 \neq \frac{\beta}{1 - \alpha}$, so konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann, wenn $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert; dies ist aber genau für $|\alpha| < 1$ der Fall, und es gilt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\beta}{1 - \alpha}$.

14. a) Wir zeigen zunächst $1 \leq a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

„ $n = 0$ “:

Es ist $a_0 \in [1, 3]$ und damit $1 \leq a_0 \leq 3$.

„ $n \rightarrow n + 1$ “:

$$\begin{aligned} 1 \leq a_n \leq 3 &\implies 1^2 \leq a_n^2 \leq 3^2 \implies \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} a_n^2 \leq \frac{9}{4} \implies \\ &\implies \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{4} a_n^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \implies 1 \leq a_{n+1} \leq 3 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{1}{4} a_n^2 + \frac{3}{4} \right) - a_n = \frac{1}{4} \cdot (a_n^2 + 3 - 4a_n) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (a_n^2 - 4a_n + 3) \stackrel{\text{Vieta}}{=} \frac{1}{4} \cdot \underbrace{(a_n - 1)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(a_n - 3)}_{\leq 0} \leq 0, \end{aligned}$$

also $a_{n+1} \leq a_n$; damit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton fallend.

- b) Gemäß a) ist die gegebene Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ für jeden Startwert $a_0 \in [1, 3]$ monoton fallend und (durch 1) nach unten beschränkt, mithin konvergent. Für ihren Grenzwert

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

gilt dann unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} a_n^2 + \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{4} a^2 + \frac{3}{4},$$

woraus sich

$$0 = a^2 - 4a + 3 \underset{\text{Vieta}}{=} (a - 1)(a - 3)$$

und damit $a = 1$ oder $a = 3$ ergibt; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung hinsichtlich des Startwertes $a_0 \in [1, 3]$:

- Für $a_0 \in [1, 3[$ gilt im Hinblick auf das in a) ermittelte Monotonieverhalten der Folge $a \leq a_0 < 3$ und damit $a = 1$.
- Für $a_0 = 3$ ist $a_1 = \frac{1}{4} \cdot 3^2 + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$ und analog $a_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit $a = 3$.

15. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n^2 + 1)(n + 1)^n}{(3n + 1)n^{n+1}} = \frac{(2n^2 + 1) \cdot (n + 1)^n}{(3n + 1) \cdot (n \cdot n^n)} = \frac{2n^2 + 1}{(3n + 1) \cdot n} \cdot \frac{(n + 1)^n}{n^n} = \\ &= \frac{n^2 \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)}{n \left(3 + \frac{1}{n}\right) \cdot n} \cdot \left(\frac{n + 1}{n}\right)^n = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \end{aligned}$$

so daß der erste Faktor wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

als Quotient konvergenter Folgen selbst konvergiert mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{2 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3};$$

der zweite Faktor ist eine bekanntlich monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge mit dem Grenzwert e , so daß die gegebene Folge als Produkt konvergenter Folgen selbst konvergiert, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}} \right)}_{\rightarrow \frac{2}{3}} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}_{\rightarrow e} = \frac{2}{3} e.$$

16. a) Man betrachte die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad \text{und} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}.$$

Wir erhalten mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung (*) zum einen

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot (n+1)^n} = \\
 &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{(n+2) \cdot n}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \stackrel{(*)}{\geq} \\
 &\geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{(n+1)^2 - n}{(n+1)^2}\right) = \\
 &= \frac{(n+2) \cdot (n^2 + n + 1)}{(n+1)^3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} \geq 1
 \end{aligned}$$

sowie zum anderen

$$\begin{aligned}
 \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (n+1)^{n+2}}{n^{n+1} \cdot (n+2)^{n+2}} = \\
 &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{(n+1)^2}{n \cdot (n+2)}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n \cdot (n+2)}\right)^{n+1} \stackrel{(*)}{\geq} \\
 &\geq \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(1 + \frac{n+1}{n \cdot (n+2)}\right) = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{n \cdot (n+2) + n+1}{n \cdot (n+2)}\right) = \\
 &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + 2n}\right) = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} \geq 1.
 \end{aligned}$$

b) Wir zeigen, daß $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + \frac{1}{n} > 1$ und damit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n.$$

- Nach a) gilt wegen $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ und $a_n > 0$ schon $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend.
- Nach a) gilt wegen $\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq 1$ und $b_{n+1} > 0$ schon $b_n \geq b_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit ist die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq b_n \leq b_1$ und damit

$$\begin{aligned}
 0 \leq b_n - a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
 &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \\
 &= a_n \cdot \frac{1}{n} \leq b_1 \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b_1 \cdot 0 = 0;
 \end{aligned}$$

folglich ist $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach dem Schrankenlemma eine Nullfolge.

Es sei bemerkt, daß für die durch diese Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ definierte eulersche Zahl $e \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ gemäß

$$\frac{7776}{3125} = \left(\frac{6}{5}\right)^5 = a_5 \leq e \leq b_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 = \frac{46656}{15625}$$

insbesondere $2 < e < 3$ gilt.