

## Tutorium zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

9. a) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n < 10^6$  gilt

$$\sqrt{n} < \sqrt{10^6} = 10^3 = 1000;$$

daraus folgt dann

$$\frac{1}{1000} < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{und damit} \quad \frac{n}{1000} < \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Zusammengefaßt erhält man

$$1000 > \sqrt{n} > \frac{n}{1000} \quad \text{und damit} \quad n + 1000 > n + \sqrt{n} > n + \frac{n}{1000},$$

wegen der Monotonie der Quadratwurzel also

$$\sqrt{n + 1000} > \sqrt{n + \sqrt{n}} > \sqrt{n + \frac{n}{1000}}$$

und damit

$$\sqrt{n + 1000} - \sqrt{n} > \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} > \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n},$$

also  $a_n > b_n > c_n$ .

b) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n + 1000} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n + 1000} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n + 1000} + \sqrt{n})}{\sqrt{n + 1000} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{\sqrt{n + 1000}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n + 1000} + \sqrt{n}} = \frac{(n + 1000) - n}{\sqrt{n + 1000} + \sqrt{n}} = \frac{1000}{\sqrt{n + 1000} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n})}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{(n + \sqrt{n}) - n}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und

$$c_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot \underbrace{\left( \sqrt{1 + \frac{1}{1000}} - 1 \right)}_{>0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

10. a) Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion:

„ $n = 1$ “:

$$\text{Es ist } a_1 = 5 \text{ und damit } 3 \leq a_1 \leq 5.$$

„ $n \rightarrow n + 1$ “:

$$\begin{aligned} 3 \leq a_n \leq 5 &\implies 4 \geq 7 - a_n \geq 2 \implies \frac{1}{2} \leq \frac{2}{7 - a_n} \leq 1 \implies \\ &\frac{7}{2} \leq 3 + \frac{2}{7 - a_n} \leq 4 \implies 3 \leq a_{n+1} \leq 5 \end{aligned}$$

b) Wir zeigen  $a_n \geq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit vollständiger Induktion:

„ $n = 1$ “:

$$a_1 = 5 \geq 4 = 3 + \frac{2}{7 - 5} = a_2.$$

„ $n \rightarrow n + 1$ “:

$$\begin{aligned} a_n \geq a_{n+1} &\implies 7 - a_n \leq 7 - a_{n+1} \implies \frac{2}{7 - a_n} \geq \frac{2}{7 - a_{n+1}} \implies \\ a_{n+1} &= 3 + \frac{2}{7 - a_{n+1}} \geq 3 + \frac{2}{7 - a_n} = a_{n+2} \end{aligned}$$

Damit ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend und gemäß a) beschränkt, folglich ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent.

c) Für den Grenzwert  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  gilt  $3 \leq a \leq 5$  gemäß a), und damit erhält man

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 + \frac{2}{7 - a_n} \right) = 3 + \frac{2}{7 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = 3 + \frac{2}{7 - a}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} (a - 3)(7 - a) = 2 &\implies -a^2 + 10a - 21 = 2 \implies \\ a^2 - 10a + 23 &= 0 \implies a = \frac{10 \pm \sqrt{8}}{2} = 5 \pm \sqrt{2}; \end{aligned}$$

wegen  $3 \leq a \leq 5$  folgt hieraus schon  $a = 5 - \sqrt{2}$ .

11. a) Wir zeigen  $0 < a_n < 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit Hilfe vollständiger Induktion:

„ $n = 1$ “: Wegen  $a_1 = \frac{1}{2}$  ist  $0 < a_1 < 1$ .

„ $n \rightarrow n + 1$ “: Es ist also  $0 < a_n < 1$ . Wegen  $a_n > 0$  ist

$$2a_n + 1 > 0 \quad \text{und} \quad 2 + a_n > 0$$

und damit

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{2 + a_n} > 0;$$

ferner ist wegen  $a_n < 1$  auch  $a_n - 1 < 0$  und damit

$$a_{n+1} - 1 = \frac{2a_n + 1}{2 + a_n} - 1 = \frac{(2a_n + 1) - (2 + a_n)}{2 + a_n} = \frac{a_n - 1}{2 + a_n} < 0,$$

also  $a_{n+1} < 1$ . Insgesamt gilt also  $0 < a_{n+1} < 1$ .

- b) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $0 < a_n < 1$  gemäß a), woraus  $2 + a_n > 0$  und  $a_n^2 < 1$ , also  $1 - a_n^2 > 0$  folgt; somit erhält man

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2a_n + 1}{2 + a_n} - a_n = \frac{(2a_n + 1) - a_n(2 + a_n)}{2 + a_n} = \\ &= \frac{2a_n + 1 - 2a_n - a_n^2}{2 + a_n} = \frac{1 - a_n^2}{2 + a_n} > 0, \end{aligned}$$

also  $a_{n+1} > a_n$ . Damit ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  streng monoton wachsend.

- c) Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist gemäß b) (streng) monoton wachsend und gemäß a) (nach oben) beschränkt, also konvergent. Für ihren Grenzwert  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  gilt dann unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 1}{2 + a_n} = \frac{2a + 1}{2 + a},$$

woraus sich

$$a(2 + a) = 2a + 1, \quad \text{also} \quad 2a + a^2 = 2a + 1,$$

und damit

$$a^2 = 1, \quad \text{also} \quad a \in \{-1, 1\}$$

ergibt; wegen  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  muß auch  $a \geq 0$  gelten, womit man schließlich  $a = 1$  erhält.

12. a) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist das Folgenglied

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

die Summe der  $n + 1$  aufeinanderfolgenden Stammbrüche  $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{2n}$ ; damit ergibt sich zum einen

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\leq \frac{1}{n}} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\leq \frac{1}{n}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\leq \frac{1}{n}} \leq (n+1) \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 2$$

und zum anderen

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

Damit ist die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  beschränkt.

b) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \\ &= \left( \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) - \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\leq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{\leq \frac{1}{2n}} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0; \end{aligned}$$

damit ist die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  monoton fallend. Zusammen mit der in a) gezeigten Beschränktheit ist die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  insbesondere also konvergent.