

Tutorium zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

5. Wir weisen anhand der Definition nach, daß die gegebene Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{\sin^3 n - 3 \cos n}{\sqrt{n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

den Grenzwert $a = 0$ besitzt; sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left| \frac{\sin^3 n - 3 \cos n}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{|\sin^3 n - 3 \cos n|}{\sqrt{n}} \leq \\ &\leq \frac{|\sin^3 n| + |3 \cos n|}{\sqrt{n}} = \frac{|\sin n|^3 + 3 \cdot |\cos n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1^3 + 3 \cdot 1}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

mit

$$\frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \frac{4}{\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2 < n.$$

Wir wählen eine natürliche Zahl n_0 mit $n_0 > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2$, so daß wir für alle $n \geq n_0$ wegen $n > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2$ damit

$$|a_n - a| \leq \frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

erhalten.

6. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich unter Verwendung der Gaußformel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot (1 + 0) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Summenformel für geometrische Summen erhält man ferner für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{7^k} = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{2}{7}\right)^k = \frac{1 - \left(-\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{1 - \left(-\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{\frac{9}{7}} = \\ &= \frac{7}{9} \cdot \underbrace{\left(1 - \left(-\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right)}_{\rightarrow 0, \text{ da } \left|-\frac{2}{7}\right| < 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{7}{9} \cdot (1 - 0) = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

7. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nach dem binomischen Lehrsatz bzw. der binomischen Formel

- $(2n^2 + 3)^3 = (2n^2)^3 + 3(2n^2)^2 \cdot 3 + 3(2n^2) \cdot 3^2 + 3^3 = 8n^6 + 36n^4 + 54n^2 + 27$
- $(3n^3 + 2)^2 = (3n^3)^2 + 2(3n^3) \cdot 2 + 2^2 = 9n^6 + 12n^3 + 4$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{(2n^2 + 3)^3}{(3n^3 + 2)^2} &= \frac{8n^6 + 36n^4 + 54n^2 + 27}{9n^6 + 12n^3 + 4} = \\ &= \frac{n^6 \left(8 + \frac{36}{n^2} + \frac{54}{n^4} + \frac{27}{n^6}\right)}{n^6 \left(9 + \frac{12}{n^3} + \frac{4}{n^6}\right)} = \frac{8 + \frac{36}{n^2} + \frac{54}{n^4} + \frac{27}{n^6}}{9 + \frac{12}{n^3} + \frac{4}{n^6}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{8 + 0 + 0 + 0}{9 + 0 + 0} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} (2n^2 + 3)^3 - (3n^3 + 2)^2 &= -n^6 + 36n^4 - 12n^3 + 54n^2 + 23 = \\ &= \underbrace{n^6}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\left(-1 + \frac{36}{n^2} - \frac{12}{n^3} + \frac{54}{n^4} + \frac{23}{n^6}\right)}_{\rightarrow -1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \end{aligned}$$

Zu diesen Ergebnissen kann man auch gelangen, ohne die Potenzen der beiden auftretenden Summen zu berechnen; es ist nämlich

$$\frac{(2n^2 + 3)^3}{(3n^3 + 2)^2} = \frac{\left(n^2 \left(2 + \frac{3}{n^2}\right)\right)^3}{\left(n^3 \left(3 + \frac{2}{n^3}\right)\right)^2} = \frac{n^6 \left(2 + \frac{3}{n^2}\right)^3}{n^6 \left(3 + \frac{2}{n^3}\right)^2} = \frac{\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)^3}{\left(3 + \frac{2}{n^3}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{(2+0)^3}{(3+0)^2} = \frac{8}{9}$$

sowie

$$\begin{aligned} (2n^2 + 3)^3 - (3n^3 + 2)^2 &= \left(n^2 \left(2 + \frac{3}{n^2}\right)\right)^3 - \left(n^3 \left(3 + \frac{2}{n^3}\right)\right)^2 = \\ &= n^6 \left(2 + \frac{3}{n^2}\right)^3 - n^6 \left(3 + \frac{2}{n^3}\right)^2 = \\ &= \underbrace{n^6}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\left[\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)^3 - \left(3 + \frac{2}{n^3}\right)^2\right]}_{\rightarrow (2+0)^3 - (3+0)^2 = -1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\frac{\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{\frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3}} = \frac{n^2 \left(\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right)}{n^2 \left(\frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3}\right)} = \frac{2 - \frac{3}{n}}{3 + \frac{3}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}$$

8. Für die (hier zu betrachtenden) Parameter $z \in \mathbb{R}^+$ ergibt sich hinsichtlich des Konvergenzverhaltens der Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 < z < 1, \\ 1, & \text{falls } z = 1, \\ \infty, & \text{falls } 1 < z; \end{cases}$$

dies motiviert die folgenden Fallunterscheidungen bezüglich x und $y \in \mathbb{R}^+$:

a) Für $0 < x < 1$ ergibt sich zunächst

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0,$$

und mit Hilfe einer Fallunterscheidung bezüglich $y > 0$ erhält man stets

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Ohne Fallunterscheidung kann man wie folgt argumentieren: für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x^n > 0$ und $1 + y^n > 1$ und damit

$$0 < \frac{x^n}{1 + y^n} < x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

nach dem Schrankenlemma ergibt sich folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0;$$

damit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

b) Für $x = 1$ ist $x^n = 1$ und damit

$$a_n = \frac{1}{1 + y^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; somit erhält man:

- Für $0 < y < 1$ ist

$$1 + \underbrace{y^n}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

- Für $y = 1$ ist $y^n = 1$ und damit $a_n = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; insbesondere ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

- Für $1 < y$ ist

$$1 + \underbrace{y^n}_{\rightarrow \infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

c) Für $x > 1$ erhält man

$$a_n = \frac{x^n}{1 + y^n} = \frac{1}{\frac{1}{x^n} + \frac{y^n}{x^n}} = \frac{1}{\frac{1}{x^n} + \left(\frac{y}{x}\right)^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{und damit} \quad \frac{1}{x^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit erhält man:

- Für $0 < y < x$ ist $\frac{y}{x} < 1$, also

$$\underbrace{\frac{1}{x^n}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^n}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

- Für $y = x$ ist $\frac{y}{x} = 1$, also

$$\underbrace{\frac{1}{x^n}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^n}_{=1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

- Für $x < y$ ist $\frac{y}{x} > 1$, also

$$\underbrace{\frac{1}{x^n}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^n}_{\rightarrow \infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$