Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

1. a) Es ist

- $a_1 = \frac{3}{3} = 1$, $a_2 = \frac{5}{4}$, $a_3 = \frac{7}{5}$, $a_4 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ und $a_5 = \frac{11}{7}$ sowie
- $b_1 = 1 - 1 + 1 = 1$, $b_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, $b_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$, $b_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{21}{16}$ und $b_5 = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{21}{25}$.

b) Die Berechnung der ersten fünf Folgenglieder unter a) legt nahe, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist; dies läßt sich auf verschiedene Weise zeigen:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$a_n = \frac{2\,n+1}{n+2} = \frac{2\,(n+2)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2}$$
und damit auch
$$a_{n+1} = 2 - \frac{3}{n+3};$$
wegen $n+2 < n+3$ ist $\dfrac{3}{n+2} > \dfrac{3}{n+3}$ und damit
$$a_n = 2 - \frac{3}{n+2} < 2 - \frac{3}{n+3} = a_{n+1}.$$
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\iff \frac{2\,n+1}{n+2} < \frac{2\,n+3}{n+3} \iff \\ &\iff (2\,n+1)\,(n+3) < (2\,n+3)\,(n+2) \iff \\ &\iff 2\,n^2+7\,n+3 < 2\,n^2+7\,n+6 \iff 0<3 \end{aligned}$$
Da die Aussage $0 < 3$ richtig ist, ist auch die gemäß den Äquivalenzumformungen („ $\iff$ “) gleichwertige Aussage $a_n < a_{n+1}$ richtig.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2\,n+3}{n+3} - \frac{2\,n+1}{n+2} = \frac{(2\,n+3)(n+2)-(2\,n+1)(n+3)}{(n+3)\,(n+2)} = \\ &= \frac{(2\,n^2+7\,n+6)-(2\,n^2+7\,n+3)}{(n+3)\,(n+2)} = \frac{3}{(n+3)\,(n+2)} > 0 \end{aligned}$$
und damit $a_n < a_{n+1}$.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\,n+3}{n+3} \cdot \frac{n+2}{2\,n+1} = \frac{2\,n^2+7\,n+6}{2\,n^2+7\,n+3} > 1$$

und damit $a_n < a_{n+1}$; hierbei geht $a_n > 0$ ein.

Die streng monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist insbesondere (etwa durch $a_1 = 1$) nach unten beschränkt; des weiteren ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen

$$a_n = 2 - \frac{3}{n+2} < 2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ auch nach oben beschränkt.
Wegen $b_1 = 1 < \frac{7}{4} = b_2$ und $b_2 = \frac{7}{4} > \frac{7}{9} = b_3$ ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder monoton fallend noch monoton wachsend; genauer gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$b_{2m} = 1 + \frac{(-1)^{2m}}{2m} + \frac{1}{(2m)^2} = 1 + \frac{1}{2m} + \frac{1}{(2m)^2} > 1$$

und

$$\begin{aligned} b_{2m+1} = 1 + \frac{(-1)^{2m+1}}{2m+1} + \frac{1}{(2m+1)^2} &= \\ = 1 - \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{(2m+1)^2} &= 1 - \frac{2m}{(2m+1)^2} < 1, \end{aligned}$$

folglich also $b_{2m} > 1 > b_{2m+1}$ und $b_{2m+1} < 1 < b_{2m+2}$.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|b_n| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right| \leq |1| + \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| + \left|\frac{1}{n^2}\right| = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2},$$

und wegen $\frac{1}{n} \leq 1$ und $\frac{1}{n^2} \leq 1$ folgt daraus $|b_n| \leq 1+1+1 = 3$; damit ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

c) Wir zeigen, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $a = 2$ besitzt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{3}$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$\begin{aligned} |a_n - a| = \left|\frac{2\,n+1}{n+2} - 2\right| = \left|\frac{(2\,n+1) - 2\,(n+2)}{n+2}\right| &= \\ = \left|\frac{-3}{n+2}\right| = \frac{3}{n+2} \leq \frac{3}{n_0} = 3 \cdot \frac{1}{n_0} < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $b = 1$ besitzt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$\begin{aligned} |b_n - b| &= \left|\left(1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - 1\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right| \leq \\ &\leq \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| + \left|\frac{1}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 2 \cdot \frac{1}{n} \leq 2 \cdot \frac{1}{n_0} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. a) „$n = 10$“:

$$10^3 = 1000 < 1024 = 2^{10}$$

„$n \to n+1$“:

$$(n+1)^3 = n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1 \leq n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + n = n^3 + 3\,n^2 + 4\,n \leq$$
$$\leq n^3 + 3\,n^2 + n \cdot n \leq n^3 + 4\,n^2 \leq n^3 + n \cdot n^2 = 2\,n^3 < 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$ gilt $0 \leq \dfrac{n^2}{2^n} < \dfrac{1}{n}$; wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ gilt dann nach dem Schrankenlemma auch $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$.

c) Sei $n_0 = \dfrac{1}{\varepsilon} = 1000$; für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt dann $\dfrac{n^2}{2^n} < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n_0} = \varepsilon$.

3. Für die beschränkte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen existiert eine Schranke $M > 0$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so gibt es eine Schranke $M^* > 0$ mit $|a_n| \leq M^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt aber

$$|a_n\,b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot M^*$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; folglich ist auch die Folge $(a_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

b) Die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist konvergent, und die alternierende Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist beschränkt; für die Folge $(a_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt dann $a_n\,b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit ist $(a_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent.

c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n| = |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$$

und damit

$$|a_n\,b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon;$$

damit ist auch $(a_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

4. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$r - \frac{1}{n} < r - \frac{1}{n+1} \qquad \text{und} \qquad r + \frac{1}{n+1} < r + \frac{1}{n};$$

damit gibt es, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, rationale Zahlen a_n und $b_n \in \mathbb{Q}$ mit

$$r - \frac{1}{n} < a_n < r - \frac{1}{n+1} \qquad \text{und} \qquad r + \frac{1}{n+1} < b_n < r + \frac{1}{n}.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$r - \frac{1}{n} < a_n < r - \frac{1}{n+1} \qquad \text{und} \qquad r - \frac{1}{n+1} < a_{n+1} < r - \frac{1}{n+2}$$

und damit

$$a_n < r - \frac{1}{n+1} < a_{n+1};$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(r - \frac{1}{n} \right) = r \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(r - \frac{1}{n+1} \right) = r$$

ist nach dem Schrankenlemma auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$r + \frac{1}{n+1} < b_n < r + \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad r + \frac{1}{n+2} < b_{n+1} < r + \frac{1}{n+1}$$

und damit

$$b_n > r + \frac{1}{n+1} > b_{n+1};$$

damit ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(r + \frac{1}{n+1} \right) = r \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(r + \frac{1}{n} \right) = r$$

ist nach dem Schrankenlemma auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = r$.