

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

49. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013*). Man bestimme für jede der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{xn} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^n x^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^x + n}$$

jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe konvergiert.

50. Man untersuche unter Berücksichtigung des Verhaltens der trigonometrischen Funktionen $\sin$, $\cos$ und $\tan$ auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}[$ die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \frac{1}{n}$$

auf Konvergenz.

51. a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}^+$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \ln x)^n$$

konvergiert, und bestimme hierfür ihre Summe.

b) Man bestimme alle $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan x)^n}{n}$$

konvergiert.

52. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2003*).

a) Man leite unter Verwendung der Exponentialreihe eine Reihendarstellung für $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ für alle $x \in \mathbb{R}$ her, und vergleiche diese mit der Sinus– und Cosinusreihe.

b) Man zeige, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, und gebe ihre Summe (getrennt für $x \geq 0$ und $x < 0$) mit Hilfe elementarer Funktionen an.