

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“

45. a) Für $a \in \mathbb{R}$ betrachte man die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$. Man zeige, daß f stetig und für $a > 0$ streng monoton wachsend bzw. für $a < 0$ streng monoton fallend ist.
- b) Man zeige, daß die Exponentialfunktion $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\exp_a(x) = a^x$, zur Basis $a > 0$ stetig ist, untersuche sie in Abhängigkeit von a auf Monotonie und bestimme ihren Wertebereich.

46. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2013*). Es seien $a, b \in]0, 1[$ fest gewählt. Man zeige, daß die Gleichung

$$a^x + b^x = 1$$

genau eine Lösung im Intervall $]0, \infty[$ besitzt.

47. Es seien die Funktionen *Sinus hyperbolicus* $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, und *Cosinus hyperbolicus* $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, gegeben.
- a) Man untersuche \sinh und \cosh auf Symmetrie, Nullstellen und Stetigkeit und bestimme ihre Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$.
- b) Man zeige die Additionstheoreme $\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$ und $\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$ und folgere daraus die Beziehung $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- c) Man zeige $W_{\sinh} = \mathbb{R}$ und $W_{\cosh} = [1, \infty[$.
48. a) Man zeige, daß die Funktion \sinh streng monoton wächst, und bestätige, daß für die Umkehrfunktion *Area sinus hyperbolicus* $\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
- b) Man zeige, daß die Einschränkung $\cosh|_{\mathbb{R}_0^+}$ von \cosh auf \mathbb{R}_0^+ streng monoton wächst und die Wertemenge $[1, \infty[$ besitzt, und bestätige, daß für die Umkehrfunktion *Area cosinus hyperbolicus* $\operatorname{Arcosh} : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
- c) Man skizziere die Graphen von \sinh und \cosh sowie von Arsinh und Arcosh .

Abgabe bis Montag, den 25. Januar 2016, 10⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).