MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 6
23.11.2015

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

21. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ mit $a_n = \dfrac{4\,n}{(n^2-1)^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

   a) Man zeige
$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
   und
$$\sum_{k=2}^{n} (-1)^k\, a_k = \frac{3}{4} + (-1)^n \cdot \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2}$$
   für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

   b) Man untersuche die Reihen $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n\, a_n$ jeweils auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihre Summen.

22. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000).*

   a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ konvergiert.

   b) Man zeige $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \dfrac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

23. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2012).* Für $n \in \mathbb{N}$ werde die n–te Partialsumme
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^k$$
   betrachtet. Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und gebe den Grenzwert von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

24. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2014).* Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch $f_1 = f_2 = 1$ und
$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \qquad \text{für alle} \quad n \geq 2$$
   rekursiv definierte Fibonacci–Folge. Man zeige:

   a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n \geq \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

   b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f_k}{f_{k+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen 0.

   c) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{f_n}$ konvergiert.

Abgabe bis Montag, den 30. November 2015, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).