MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 5
16.11.2015

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

17. Man bestimme die Häufungspunkte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{n + (-1)^n \cdot (3\,n+1)}{n} \qquad \text{und} \qquad b_n = (-1)^n + \cos\left(\frac{n\,\pi}{4}\right).$$

18. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen gebe es eine Konstante $q \in [0,1[$ mit der Eigenschaft $|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

    a) Man zeige $|a_{n+1} - a_n| \leq q^n \cdot |a_1 - a_0|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

    b) Man zeige $|a_{n+k} - a_n| \leq q^n \cdot \dfrac{|a_1 - a_0|}{1-q}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

    c) Man zeige, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge ist.

19. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen beweise man:

    a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn die Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren und denselben Grenzwert besitzen.

    b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn die Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

20. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007).* Gegeben sei die durch

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

    rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

    a) Man zeige, daß die Teilfolge $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und die Teilfolge $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

    b) Man zeige die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bestimme ihren Grenzwert.

Abgabe bis Montag, den 23. November 2015, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).