MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 4
09.11.2015

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

13. *(nach Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2015).* Man betrachte die durch

$$a_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Man zeige

a) zum einen über eine explizite Darstellung der Folgenglieder

b) und zum anderen mit Hilfe des Hauptsatzes über monotone Folgen,

daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, und bestimme den Grenzwert.

14. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006).* Man zeige, daß für jede Wahl des Startwerts $a_0 \in [0,3]$ die durch die Rekursion

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, und bestimme jeweils den Grenzwert.

15. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2014).* Für einen beliebigen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man die durch

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Man zeige:

a) Für alle Startwerte $a_0 \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend.

b) Für alle Startwerte $a_0 \in [0,1]$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen den Grenzwert 1.

c) Für alle Startwerte $a_0 \notin [0,1]$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

16. Es seien $0 < a_1 < b_1$ fest gewählt. Man betrachte die beiden über die Rekursion

$$a_{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man zeige, daß $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist, und bestimme das dadurch definierte Element $r \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

Abgabe bis Montag, den 16. November 2015, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).