MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 3
02.11.2015

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

9. a) *(Staatsexamensaufgabe Herbst 1997).* Man berechne den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (3\,n+1)\left(\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2+1}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   b) *(Staatsexamensaufgabe Herbst 1996).* Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt{n^2+2\,n} - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf Konvergenz, und bestimme gegebenenfalls deren Grenzwert.

10. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).* Gegeben sei die durch

$$a_1 = \frac{7}{2} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 5 - \sqrt{11 - 2\,a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   a) Man zeige $1 \leq a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   b) Man beweise, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

   c) Man bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2005).* Gegeben sei die durch

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{2+a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge.

   a) Man zeige, daß $a_n > \frac{1}{2}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

   b) Man untersuche die Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

12. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012).*

   a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge reeller Zahlen. Man zeige, daß dann auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

   gegen a konvergiert.

   b) Man finde eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nicht konvergiert, so daß die zugehörige Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

   c) Sei vorausgesetzt, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Man zeige, daß dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Abgabe bis Montag, den 9. November 2015, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).