

## Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“

1. Gegeben seien die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen mit

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \quad \text{bzw.} \quad b_n = \frac{n-1}{n^2+1} \quad \text{bzw.} \quad c_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Man untersuche die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf Monotonie und Beschränktheit.
  - b) Man weise jeweils anhand der Definition die Konvergenz der Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach.
2. a) Man untersuche die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \frac{n^n}{n!}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  auf Monotonie und Beschränktheit. Besitzt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einen Grenzwert?
- b) Man untersuche die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $b_n = \frac{n!}{n^n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  auf Monotonie und Konvergenz. Ist  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt?
3. Gegeben sei  $a_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ .
- a) Man zeige mit Hilfe von vollständiger Induktion  $a_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n}\right)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ .
  - b) Man zeige, daß die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einen Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$  besitzt, und bestimme ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  (mit  $n_0 \geq 2$ ) mit  $|a_n - a| < \frac{1}{1000}$  für alle  $n \geq n_0$ .
4. Man betrachte die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen. Man beweise oder widerlege folgende Aussagen.
- a) Sind die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend, so ist auch die Folge  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend.
  - b) Sind die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend, so ist auch die Folge  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend.
  - c) Ist die Folge  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt, so ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt.
  - d) Ist die Folge  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt, so ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt.

**Abgabe** bis Montag, den 26. Oktober 2015, 10<sup>00</sup> Uhr (Kästen vor der Bibliothek).