MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Klausur
01.04.2014

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

1. a) Man zeige anhand der Definition, daß die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{2\,\sin n}{n^2+1} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt, und bestimme ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 10^{-3}$ für alle $n \geq n_0$. (2)

b) Man zeige, daß die Folge

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad b_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergiert, und bestimme ihren Grenzwert. (2)

c) Man formuliere das Schrankenlemma und zeige damit, daß die Folge

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad c_n = \sqrt[n]{3^n+5^n} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergiert. (2)

2. a) Man untersuche die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \cdot \frac{5}{3^{n+1}}$$

auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert. (2)

b) Man formuliere

- das Leibnizsche Konvergenzkriterium sowie (1)
- das Cauchysche Verdichtungskriterium (1)

und untersuche die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}$$

damit

- auf Konvergenz sowie (1)
- auf absolute Konvergenz. (1)

3. a) Man formuliere den Satz von Weierstraß. (2)

   b) Für die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arcsin x \cdot \arccos x,$$

   bestimme man den Wertebereich. (2)

   c) Man betrachte eine stetige Funktion $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) > 0 \qquad \text{für alle} \qquad x \in [-1, 1]\,.$$

   Man zeige, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß

$$g(x) \geq \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad x \in [-1, 1]$$

   gilt. (2)

4. Man betrachte die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}x} - 1\right).$$

   a) Man bestimme den maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ von f und zeige, daß f umkehrbar ist. (2)

   b) Man bestimme den Wertebereich W_f von f und gebe die Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$ explizit an. (2)

   c) Man zeige, daß es genau eine Tangente an den Graphen G_f von f gibt, die parallel zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten ist. (2)