MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 12
27.01.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

45. Man bestimme jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen:

   a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3\,x^2 - 4\ln|x| - \frac{2}{x^2}$
   b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x \cdot \ln(x^2+1)$
   c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \dfrac{(\ln x)^2 + 1}{x}$
   d) $k : \,]-a; a[\, \to \mathbb{R}, \quad k(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a} \quad$ mit $a > 0$

46. Man begründe, daß die beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^x, \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^{\frac{1}{x}},$$

differenzierbar sind, und bestimme ihre Ableitungen.

47. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012).*

   a) Man zeige, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

   im Punkt $a = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

   b) Man zeige, daß die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

   im Punkt $a = 0$ stetig und differenzierbar ist.

48. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2003).*

   a) Man leite unter Verwendung der Exponentialreihe eine Reihendarstellung für $\sinh x = \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x})$ und $\cosh x = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$ für alle $x \in \mathbb{R}$ her, und vergleiche diese mit der Sinus– und Cosinusreihe.

   b) Man zeige, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, und gebe ihre Summe (getrennt für $x \geq 0$ und $x < 0$) mit Hilfe elementarer Funktionen an.