MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 10
13.01.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

37. Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\,x^3}{x^2+1}, & \text{für } x < -1, \\ -1, & \text{für } x = -1, \\ x^2 - 2\,x - 4, & \text{für } x > -1. \end{cases}$$

   a) Man zeige, daß f stetig ist.

   b) Man berechne die Grenzwerte von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ und bestimme den Wertebereich W_f von f.

   c) Man begründe, daß die Einschränkung $f|_{[1;\infty[}$ von f auf das Intervall $[1;\infty[$ umkehrbar ist, und gebe die Umkehrfunktion explizit an.

38. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

   a) Man zeige, daß f stetig und streng monoton wachsend ist.

   b) Man bestimme den Wertebereich W_f von f.

   c) Man gebe die Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$ explizit an. Ist f^{-1} stetig?

39. Man zeige, daß eine stetige Funktion $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ mit $W_f \subseteq [0;1]$ stets einen *Fixpunkt* ξ besitzt, d.h. es existiert ein $\xi \in [0;1]$ mit $f(\xi) = \xi$.

40. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen. Man beweise oder widerlege:

   a) Die Funktion $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend.

   b) Die Funktion $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend.

   c) Die Funktion $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist monoton fallend.

   d) Ist f nullstellenfrei, so ist die Funktion $\frac{1}{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend.