MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 5
18.11.2013

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

17. Man bestimme die Häufungspunkte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) \qquad \text{und} \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right)\right)^n.$$

18. Man betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige $a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell} \geq \frac{1}{2}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und folgere daraus, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge ist.

19. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ mit $a_n = \dfrac{1}{n\,(n^2-1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

    a) Man zeige, daß für die n–te Partialsumme $s_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2\,n\,(n+1)}$ gilt.

    b) Man zeige, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(n^2-1)}$ konvergiert, und bestimme ihre Summe.

20. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ mit $a_n = \dfrac{4\,n}{(n^2-1)^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

    a) Man zeige

    $$\sum_{k=2}^{n} a_k = \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

    und

    $$\sum_{k=2}^{n} (-1)^k\, a_k = \frac{3}{4} + (-1)^n \cdot \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2}$$

    für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

    b) Man untersuche die Reihen $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ und $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\, a_n$ jeweils auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihre Summen.