

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

13. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006*). Man zeige, daß für jede Wahl des Startwerts $a_0 \in [0; 3]$ die durch die Rekursion

$$a_{n+1} = \frac{1}{5} (a_n^2 + 6) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert, und bestimme jeweils den Grenzwert.

14. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2012*). Man zeige, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{(2n^2 + 1)(n + 1)^n}{(3n + 1)n^{n+1}}$$

konvergiert, und bestimme den Grenzwert der Folge.

15. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2005*). Sei a eine reelle Zahl und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Es sei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = a^2.$$

Man beweise: Ist c Grenzwert einer konvergenten Teilfolge der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so ist $c = a$ oder $c = -a$.

16. Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- a) Man zeige $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ und $\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
b) Man zeige, daß $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist.