MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 3
04.11.2013

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

9. Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}, \quad b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \quad \text{und} \quad c_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n < 10^6$ gilt $a_n > b_n > c_n$.
b) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$.

10. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2007).* Gegeben sei die durch

$$a_1 = 5 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 3 + \frac{2}{7 - a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Man zeige $3 \leq a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
b) Man beweise, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
c) Man bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11. Gegeben sei die durch

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{2\,a_n + 1}{2 + a_n} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man zeige:

a) Es ist $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend.
c) Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

12. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2005).* Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

a) Man untersuche, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.
b) Man untersuche, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.