

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

5. Man untersuche die Folgen

$$\left(\frac{(2n^2 + 3)^3}{(3n^3 + 2)^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(\frac{\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{\frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3}} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad ((2n^2 + 3)^3 - (3n^3 + 2)^2)_{n \in \mathbb{N}}$$

auf Konvergenz und gebe gegebenenfalls den Grenzwert an.

6. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2006*). Man zeige, daß die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} \quad \text{und} \quad b_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{7^k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

konvergieren, und berechne ihre Grenzwerte.

7. Für die positiven Parameter $x, y \in \mathbb{R}^+$ betrachte man die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{x^n}{1 + y^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

- a) Sei zunächst $0 < x < 1$. Man zeige, daß dann $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
 - b) Sei nun $x = 1$. Man zeige, daß dann $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimme in Abhängigkeit von $y > 0$ ihren Grenzwert.
 - c) Sei schließlich $1 < x$. Man untersuche $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Abhängigkeit von $y > 0$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.
8. Man gebe jeweils Beispiele von Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ an, so daß die Folge $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- a) gegen $+\infty$ bestimmt divergiert (uneigentlich konvergiert).
 - b) gegen $-\infty$ bestimmt divergiert (uneigentlich konvergiert).
 - c) gegen eine beliebig vorgegebene reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ konvergiert.
 - d) beschränkt ist, aber divergiert.