

## Tutorium zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“

1. Gegeben seien die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen mit

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2} \quad \text{bzw.} \quad b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Man bestimme jeweils die ersten fünf Folgenglieder.
  - b) Man untersuche  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf Monotonie und Beschränktheit.
  - c) Man weise jeweils anhand der Definition die Konvergenz von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach.
2. a) Man zeige  $n^3 < 2^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 10$ .
- b) Man folgere aus a), daß die Folge  $\left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist.
- c) Zu  $\varepsilon = 10^{-3}$  gebe man ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{n^2}{2^n} < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$  an.
3. Es sei  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Man beweise oder widerlege:
- a) Ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt, so ist auch die Folge  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt.
  - b) Ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent, so ist auch die Folge  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent.
  - c) Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge, so ist auch  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge.
4. Sei  $r \in \mathbb{R}$  eine beliebige reelle Zahl.
- a) Man begründe, daß es für alle  $n \in \mathbb{N}$  rationale Zahlen  $a_n$  und  $b_n \in \mathbb{Q}$  mit  $r - \frac{1}{n} < a_n < r - \frac{1}{n+1}$  und  $r + \frac{1}{n+1} < b_n < r + \frac{1}{n}$  gibt.
  - b) Man zeige, daß  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine streng monoton wachsende Folge rationaler Zahlen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$  ist.
  - c) Man zeige, daß  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine streng monoton fallende Folge rationaler Zahlen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$  ist.