MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 12
27.01.2014

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

45. a) Für $x > 1$ ist $\ln x > 0$, mit der Definition der allgemeinen Potenz also

$$f :]1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = (\ln x)^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln(\ln x)} = e^{g(x)}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir $f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$, und für g' ergibt sich mit Hilfe der Produktregel und der Kettenregel für den zweiten Faktor

$$g'(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x) + \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \left(\ln(\ln x) + 1\right),$$

insgesamt also

$$\begin{aligned} f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{\ln x \cdot \ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{x} \left(\ln(\ln x) + 1\right) = \\ = (\ln x)^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \left(\ln(\ln x) + 1\right) = f(x) \cdot \frac{1}{x} \left(\ln(\ln x) + 1\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in]1, \infty[$.

b) Mit wiederholter Anwendung der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}}} \cdot \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}}} \cdot \frac{2x \cdot \sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \\ &= \frac{x \cdot \left(2\sqrt{x^2+1} + 1\right)}{2\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}} \cdot \sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Über die Potenzgesetze erhalten wir

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^2 \cdot \left(e^{\sin x}\right)^{\cos x} = x^2 \cdot e^{\sin x \cdot \cos x},$$

so daß sich mit der Produktregel und der Kettenregel für den zweiten Faktor

$$\begin{aligned} h'(x) = 2x \cdot e^{\sin x \cdot \cos x} + x^2 \cdot e^{\sin x \cdot \cos x} \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \\ = e^{\sin x \cdot \cos x} \cdot \left(2x + x^2 \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt.

d) Für $x > \frac{1}{e}$ ist $\ln x > \ln \frac{1}{e} = -1$ und damit $\ln x + 1 > 0$, mit der Definition der allgemeinen Potenz also

$$k : \left]\tfrac{1}{e}, \infty\right[\to \mathbb{R}, \quad k(x) = (\ln x + 1)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x + 1)} = e^{g(x)}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir $k'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$, und für g' ergibt sich mit Hilfe der Produktregel und der Kettenregel für den zweiten Faktor

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(\ln x + 1) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x + 1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\ln x + 1} - \ln(\ln x + 1)\right),$$

insgesamt also

$$\begin{aligned} k'(x) &= e^{g(x)} \cdot g'(x) \\ &= e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x + 1)} \cdot \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\ln x + 1} - \ln(\ln x + 1)\right) \\ &= (\ln x + 1)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\ln x + 1} - \ln(\ln x + 1)\right) \\ &= k(x) \cdot \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\ln x + 1} - \ln(\ln x + 1)\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in \left]\frac{1}{e}, \infty\right[$.

46. Die zu betrachtende Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = |x| \cdot g(x) = \begin{cases} x \cdot g(x), & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \\ -x \cdot g(x), & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

ist (wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von g) nach der Produktregel zunächst in allen Punkten $a \neq 0$ differenzierbar mit

$$h'(a) = \begin{cases} g(a) + a \cdot g'(a), & \text{für } a > 0, \\ -g(a) - a \cdot g'(a), & \text{für } a < 0; \end{cases}$$

mit der Stetigkeit von g (im Punkte $a = 0$) ergibt sich

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{|x| \cdot g(x) - 0}{x - 0} = \underbrace{\frac{|x|}{x}}_{=\pm 1} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to g(0) = 0} \xrightarrow[x \to 0]{} 0,$$

so daß h auch im Punkt $a = 0$ differenzierbar ist mit $h'(0) = 0$. Die Ableitungsfunktion $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist zunächst aufgrund der Stetigkeit von g und g' in allen Punkten $a \neq 0$ stetig; ferner gilt mit der Stetigkeit von g und g' im Punkte $a = 0$ auch

$$h'(x) = \underbrace{g(x)}_{\to g(0) = 0} + \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\to g'(0)} \xrightarrow[x \to 0+]{} 0 = h'(0)$$

sowie entsprechend

$$h'(x) = -\underbrace{g(x)}_{\to g(0)=0} - \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\to g'(0)} \underset{x\to 0-}{\longrightarrow} 0 = h'(0),$$

weswegen h' auch im Punkte $a = 0$ stetig ist. Insgesamt ist also h eine stetig differenzierbare Funktion.

47. Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x < 0, \\ e^x - 1, & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

ist zunächst für alle $x \neq 0$ als Summe, Produkt und Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar; dabei gilt

$$f'(x) = 1 + \left(2\,x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = 1 + 2\,x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

für alle $x < 0$ sowie $f'(x) = e^x$ für alle $x > 0$.

Zum Nachweis der Differenzierbarkeit von f an der Stelle 0 betrachten wir das Grenzverhalten des Differenzenquotienten: für den rechtsseitigen Grenzwert gilt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

gemäß Satz 5.4 (3) bzw. als Differentialquotient der Exponentialfunktion an der Stelle 0; für den linksseitigen Grenzwert gilt dann

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 1\right| &= \left|\frac{x + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} - 1\right| = \left|\left(1 + x \cdot \sin \frac{1}{x}\right) - 1\right| = \\ &= \left|x \cdot \sin \frac{1}{x}\right| = |x| \cdot \underbrace{\left|\sin \frac{1}{x}\right|}_{\leq 1} \leq |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

woraus sich unter Verwendung des Schrankenlemmas

$$\lim_{x\to 0-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 1\right) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

ergibt. Insgesamt ist f differenzierbar mit

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} 1 + 2\,x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{für } x < 0, \\ 1, & \text{für } x = 0, \\ e^x, & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Zum Nachweis, daß die Ableitung f' im Punkt $x = 0$ unstetig ist, betrachten wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D_f mit

$$a_n = -\frac{1}{2\,n\,\pi} \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N};$$

damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, aber

$$f'(a_n) = 1 + \frac{2}{-2\,n\,\pi} \cdot \underbrace{\sin(-2\,n\,\pi)}_{=0} - \underbrace{\cos(-2\,n\,\pi)}_{=1} = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \neq 1 = f'(0).$$

Damit ist f' unstetig im Punkt $x = 0$, insbesondere also f nicht stetig differenzierbar.

48. a) sinh und cosh sind als Differenz bzw. Summe differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sinh' x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}(-1)\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x$$

sowie

$$\cosh' x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}(-1)\right) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x.$$

b) Arsinh ist als Summe und Verknüpfung differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar, und die zweimalige Anwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arsinh}' x &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (2\,x)\right) = \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Alternativ läßt sich mit Hilfe der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen wie folgt argumentieren: sinh ist eine stetige und streng monoton wachsende Funktion, die in allen Punkten ihres Definitionsintervalls $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $\sinh' x = \cosh x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; damit ist die Umkehrfunktion Arsinh differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arsinh}' x &= \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arsinh} x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arsinh} x)} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(\operatorname{Arsinh} x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};
\end{aligned}$$

dabei geht die Beziehung $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, also $\cosh y = \sqrt{\sinh^2 y + 1}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ein.

c) Arcosh ist auf dem Intervall $]1,\infty[$ als Summe und Verknüpfung differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar; dabei kommt die Nichtdifferenzierbarkeitsstelle $a = 0$ der Wurzelfunktion wegen $x^2 - 1 > 0$ für alle $x > 1$

nicht zum Tragen. Die zweimalige Anwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcosh}' x &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot (2\,x)\right) = \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

für alle $x \in \,]1,\infty[$. Alternativ läßt sich mit Hilfe der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen wie folgt argumentieren: $\cosh|_{\mathbb{R}_0^+}$ ist eine stetige und streng monoton wachsende Funktion, die in allen Punkten ihres Definitionsintervalls $\mathbb{R}_0^+$ differenzierbar ist mit $\cosh' x = \sinh x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$; damit ist die Umkehrfunktion Arcosh auf $]1,\infty[$ differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcosh}' x &= \frac{1}{\cosh'(\operatorname{Arcosh} x)} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{Arcosh} x)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{Arcosh} x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}};\end{aligned}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^+$ ergibt sich nämlich aus der Beziehung $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ zunächst $\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$ und unter Berücksichtigung von $\sinh y > 0$ schließlich $\sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1}$.