

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

41. a) Für $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^a.$$

Gemäß der Definition der allgemeinen Potenz erhalten wir

$$f(x) = x^a = \exp(a \cdot \ln x) = e^{a \cdot \ln x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Die Logarithmusfunktion

$$f_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = a \cdot \ln x$$

und die Exponentialfunktion

$$f_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = e^x$$

sind stetig und damit auch die Komposition

$$f = f_2 \circ f_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{a \cdot \ln x}.$$

Die Funktionen $\exp : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ und $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig und streng monoton wachsend; wir treffen nun hinsichtlich $a \in \mathbb{R}$ folgende Fallunterscheidung:

- Sei $a > 0$. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\implies \ln x_1 < \ln x_2 \implies a \cdot \ln x_1 < a \cdot \ln x_2 \implies \\ &\implies e^{a \cdot \ln x_1} < e^{a \cdot \ln x_2} \implies f(x_1) < f(x_2); \end{aligned}$$

damit ist f streng monoton wachsend.

- Sei $a < 0$. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\implies \ln x_1 < \ln x_2 \implies a \cdot \ln x_1 > a \cdot \ln x_2 \implies \\ &\implies e^{a \cdot \ln x_1} > e^{a \cdot \ln x_2} \implies f(x_1) > f(x_2); \end{aligned}$$

damit ist f streng monoton fallend.

b) Zunächst ist die allgemeine Exponentialfunktion

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x = \exp(x \ln a),$$

als Verknüpfung der (stetigen) Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und der (ebenfalls stetigen) linearen Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \ln a$, selbst stetig. Wir treffen nun die folgende Fallunterscheidung:

- Fall 1: $a > 1$, also $\ln a > 0$. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt dann $x_1 \ln a < x_2 \ln a$ sowie

$$\exp_a(x_1) = \exp(x_1 \ln a) < \exp(x_2 \ln a) = \exp_a(x_2);$$

damit ist \exp_a streng monoton wachsend. Wegen

$$\exp_a(x) = \exp(x \ln a) > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $W_{\exp_a} \subseteq \mathbb{R}^+$; für „ \supseteq “ sei nun $y \in \mathbb{R}^+$. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(\underbrace{x \ln a}_{\rightarrow -\infty}) = 0$$

gibt es ein $b < 0$ mit $\exp_a(b) < y$, und wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(\underbrace{x \ln a}_{\rightarrow \infty}) = \infty$$

gibt es ein $c > 0$ mit $\exp_a(c) > y$, so daß nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [b; c]$ mit $\exp_a(\xi) = y$ existiert; folglich ist $W_{\exp_a} = \mathbb{R}^+$.

- Fall 2: $a = 1$, also $\ln a = 0$. Wegen

$$\exp_1(x) = \exp(x \ln 1) = \exp(x \cdot 0) = \exp(0) = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist \exp_1 eine konstante Funktion, insbesondere also sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend; ferner ist $W_{\exp_1} = \{1\}$.

- Fall 3: $a < 1$, also $\ln a < 0$. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt dann $x_1 \ln a > x_2 \ln a$ sowie

$$\exp_a(x_1) = \exp(x_1 \ln a) > \exp(x_2 \ln a) = \exp_a(x_2);$$

damit ist \exp_a streng monoton fallend. Wegen

$$\exp_a(x) = \exp(x \ln a) > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $W_{\exp_a} \subseteq \mathbb{R}^+$; für „ \supseteq “ sei nun $y \in \mathbb{R}^+$. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(\underbrace{x \ln a}_{\rightarrow \infty}) = \infty$$

gibt es ein $b < 0$ mit $\exp_a(b) > y$, und wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(\underbrace{x \ln a}_{\rightarrow -\infty}) = 0$$

gibt es ein $c > 0$ mit $\exp_a(c) < y$, so daß nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [b; c]$ mit $\exp_a(\xi) = y$ existiert; folglich ist $W_{\exp_a} = \mathbb{R}^+$.

42. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}.$$

a) Die quadratische Funktion

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x^2,$$

und die Sinusfunktion

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \sin x,$$

sind stetig und damit auch die Komposition

$$f_3 = f_1 \circ f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x.$$

Zudem ist die konstante Funktion

$$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_4(x) = 1,$$

und damit die Summe

$$f_5 = f_4 + f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_5(x) = 1 + \sin^2 x,$$

und schließlich der Quotient

$$f = \frac{f_3}{f_5} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x},$$

stetig; dabei ist $f_5(x) = 1 + \sin^2 x \geq 1$ und damit $f_5(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \quad \text{und damit} \quad 0 < 1 \leq 1 + \sin^2 x \leq 2,$$

woraus sich zum einen $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \geq 0$ und zum anderen

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} = \frac{(1 + \sin^2 x) - 1}{1 + \sin^2 x} = 1 - \underbrace{\frac{1}{1 + \sin^2 x}}_{\geq \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$$

ergibt; damit gilt zunächst $W_f \subseteq [0, \frac{1}{2}]$. Für „ \supseteq “ sei $y \in [0, \frac{1}{2}]$; wegen $\sin 0 = 0$ und $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ gilt

$$f(0) = \frac{\sin^2 0}{1 + \sin^2 0} = 0 \leq y \leq \frac{1}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{1 + \sin^2 \frac{\pi}{2}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

und für die ebenfalls stetige Einschränkung $f|_{[0, \frac{\pi}{2}]}$ existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $f(\xi) = y$, und damit ist $y \in W_f$.

c) Für alle $x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $x_1 < x_2$ gilt

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{\sin^2 x_1}{1 + \sin^2 x_1} - \frac{\sin^2 x_2}{1 + \sin^2 x_2} \\ &= \frac{\sin^2 x_1 \cdot (1 + \sin^2 x_2) - \sin^2 x_2 \cdot (1 + \sin^2 x_1)}{(1 + \sin^2 x_1) \cdot (1 + \sin^2 x_2)} \\ &\quad < 0 \text{ wegen } (*) \\ &= \frac{\overbrace{\sin^2 x_1 - \sin^2 x_2}^{< 0}}{\underbrace{(1 + \sin^2 x_1) \cdot (1 + \sin^2 x_2)}_{> 0}} < 0, \end{aligned}$$

also $f(x_1) < f(x_2)$; damit ist f streng monoton wachsend. Dabei verwenden wir für $(*)$, daß die Sinusfunktion auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und nichtnegativ ist, so daß sich aus $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ schon

$$0 \leq \sin x_1 < \sin x_2 \quad \text{und damit} \quad \sin^2 x_1 < \sin^2 x_2,$$

also $\sin^2 x_1 - \sin^2 x_2 < 0$, ergibt.

Da nun f auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton ist, ist die Einschränkung $f|_{[0, \frac{\pi}{2}]}$ umkehrbar; gemäß b) ist auch $W_{f|_{[0, \frac{\pi}{2}]}} = [0, \frac{1}{2}]$. Für $y \in [0, \frac{1}{2}]$ und $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt dabei:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} = y \iff \sin^2 x = y \cdot (1 + \sin^2 x) \iff \\ &\iff \sin^2 x = y + y \cdot \sin^2 x \iff \sin^2 x - y \cdot \sin^2 x = y \iff \\ &\iff (1 - y) \cdot \sin^2 x = y \iff_{y \neq 1} \sin^2 x = \frac{y}{1 - y} \iff_{\substack{\sin x \geq 0 \\ \frac{y}{1-y} \geq 0}} \sin x = \sqrt{\frac{y}{1 - y}} \iff_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} x = \arcsin \sqrt{\frac{y}{1 - y}}. \end{aligned}$$

Damit ist $f^{-1} : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \arcsin \sqrt{\frac{y}{1-y}}$.

43. a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2} (e^{-x} - e^{-(-x)}) = \frac{1}{2} (e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = -\sinh x$$

sowie

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2} (e^{-x} + e^{-(-x)}) = \frac{1}{2} (e^{-x} + e^x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x;$$

damit ist \sinh eine ungerade sowie \cosh eine gerade Funktion, d.h. G_{\sinh} ist punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. G_{\cosh} ist achsensymmetrisch zur y -Achse. Wegen

$$\sinh x = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff x = 0$$

besitzt \sinh genau eine Nullstelle, nämlich $x = 0$; für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt ferner $e^x > 0$ und $e^{-x} > 0$ und damit $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$, insbesondere ist demnach \cosh ohne Nullstellen.

Zunächst sind Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$, sowie die lineare Funktion $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = -x$, stetig. Damit ist auch die Verknüpfung $f_2 = \exp \circ f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = e^{-x}$, sowie die Differenz bzw. Summe $f_3 = \exp - f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = e^x - e^{-x}$, bzw. $f_4 = \exp + f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_4(x) = e^x + e^{-x}$, stetig, woraus schließlich die Stetigkeit von $\sinh = \frac{1}{2} \cdot f_3$ und $\cosh = \frac{1}{2} \cdot f_4$ folgt.

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ erhält man

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \infty$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \infty,$$

und wegen $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$ erhält man

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\infty$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \infty.$$

Die Grenzwerte für $x \rightarrow -\infty$ lassen sich natürlich auch aus den entsprechenden Grenzwerten für $x \rightarrow \infty$ unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften herleiten.

b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y &= \\ &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = \\ &= \frac{1}{4}(e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}) + \\ &+ \frac{1}{4}(e^x e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}) = \\ &= \frac{1}{2}(e^x e^y - e^{-x} e^{-y}) = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)}) = \sinh(x+y) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y &= \\ &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = \\ &= \frac{1}{4}(e^x e^y + e^x e^{-y} + e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}) + \\ &+ \frac{1}{4}(e^x e^y - e^x e^{-y} - e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}) = \\ &= \frac{1}{2}(e^x e^y + e^{-x} e^{-y}) = \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-(x+y)}) = \cosh(x+y). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 1 = \cosh 0 &= \cosh(x + (-x)) = \cosh x \cdot \cosh(-x) + \sinh x \cdot \sinh(-x) = \\ &= \cosh x \cdot \cosh x + \sinh x \cdot (-\sinh x) = \cosh^2 x - \sinh^2 x. \end{aligned}$$

- c) Wir zeigen zunächst $W_{\sinh} = \mathbb{R}$; sei dazu $y \in \mathbb{R}$. Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = \infty$ gibt es ein $b > 0$ mit $f(b) > y$, und wegen $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$ gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) < y$; wegen der Stetigkeit von \sinh existiert also nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a; b]$ mit $\sinh \xi = y$. Folglich gilt also $W_{\sinh} = \mathbb{R}$.
Wir zeigen nun $W_{\cosh} = [1; \infty[$ durch den Nachweis von zwei Inklusionen:
„ \subseteq “: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x \geq 1$ und damit, da die Funktion \cosh nur positive Werte annimmt, bereits $\cosh x \geq 1$; folglich ist $W_{\cosh} \subseteq [1; \infty[$.
„ \supseteq “: Für alle $y \in [1; \infty[$ gilt $\cosh 0 = 1 \leq y$, und wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh x = \infty$ gibt es ein $b > 0$ mit $\cosh b > y$; wegen der Stetigkeit von \cosh existiert also nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [0; b]$ mit $f(\xi) = y$. Folglich ist $y \in W_{\cosh}$, und es gilt auch $W_{\cosh} \supseteq [1; \infty[$.

44. a) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$, also $-x_2 < -x_1$; da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, folgt damit $e^{x_1} < e^{x_2}$ und $e^{-x_2} < e^{-x_1}$, also $-e^{-x_1} < -e^{-x_2}$, woraus sich $e^{x_1} - e^{-x_1} < e^{x_2} - e^{-x_2}$ und schließlich $\sinh x_1 = \frac{1}{2}(e^{x_1} - e^{-x_1}) < \frac{1}{2}(e^{x_2} - e^{-x_2}) = \sinh x_2$ ergibt. Damit ist \sinh streng monoton wachsend. Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sinh x = y &\iff \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = y \iff e^x - e^{-x} = 2y \iff \\ &\iff e^x - 2y = e^{-x} \iff (e^x)^2 - 2ye^x = 1 \iff \\ &\iff (e^x)^2 - 2ye^x + y^2 = y^2 + 1 \iff (e^x - y)^2 = y^2 + 1 \iff \\ &\iff e^x - y = \pm \sqrt{y^2 + 1} \iff e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \iff_{e^x > 0} \\ &\iff e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \iff x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

- b) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ mit $x_1 < x_2$; wegen a) gilt $0 = \sinh 0 \leq \sinh x_1 < \sinh x_2$, also $\sinh^2 x_1 < \sinh^2 x_2$, woraus sich

$$\cosh^2 x_1 = 1 + \sinh^2 x_1 < 1 + \sinh^2 x_2 = \cosh^2 x_2$$

und damit, da \cosh nur positive Werte annimmt, schon $\cosh x_1 < \cosh x_2$ ergibt. Damit ist $\cosh|_{\mathbb{R}_0^+}$ streng monoton wachsend. Die Argumentation von Aufgabe 43 c) zeigt, daß die Wertemenge der Einschränkung mit der Wertemenge $W_{\cosh} = [1; \infty[$ übereinstimmt.

Für alle $y \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \cosh x = y &\iff \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = y \iff e^x + e^{-x} = 2y \iff \\ &\iff e^x - 2y = -e^{-x} \iff (e^x)^2 - 2ye^x = -1 \iff \\ &\iff (e^x)^2 - 2ye^x + y^2 = y^2 - 1 \iff (e^x - y)^2 = y^2 - 1 \iff \\ &\iff e^x - y = \pm \sqrt{y^2 - 1} \iff e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}, \end{aligned}$$

wobei $y + \sqrt{y^2 - 1} \geq y \geq 1$ sowie $0 < y - \sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} \leq 1$ gilt;
wegen $x \geq 0$ ist $e^x \geq 1$, und damit erhält man

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}, \quad \text{also} \quad x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right).$$

Damit gilt

$$\text{Arcosh} : [1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{Arcosh } y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

- c) Für die Graphen von \sinh und \cosh sowie von Arsinh und Arcosh ergibt sich:

