MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 10
13.01.2014

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

37. a) Wir zeigen die Stetigkeit von f in jedem Punkt $b \in \mathbb{R}$:

- Die Einschränkung $f|_{]-\infty;1[}$ von f auf $]-\infty;1[$ ist als quadratische Funktion stetig; folglich ist f in allen Punkten $b \in]-\infty;1[$ stetig.
- Die Einschränkung $f|_{]1;\infty[}$ von f auf $]1;\infty[$ ist als quadratische Funktion stetig; folglich ist f in allen Punkten $b \in]1;\infty[$ stetig.
- Für $b = 1$ gilt

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (a\,x\,(2-x)) = a \cdot 1 \cdot (2-1) = a = f(1)$$

und

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \left(x^2 - 2\,x + a + 1\right) = 1^2 - 2 \cdot 1 + a + 1 = a;$$

damit ist f im Punkt $b = 1$ stetig.

Insgesamt ist also die Funktion f stetig.

b) Für alle $x \geq 1$ ist

$$f(x) = \underbrace{a\,x}_{\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\infty} \cdot \underbrace{(2-x)}_{\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}-\infty} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

und für alle $x < 1$ ist

$$f(x) = \underbrace{x}_{\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty} \cdot \underbrace{(x-2)}_{\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty} +(a+1) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Sei $y \in \mathbb{R}$; wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ gibt es ein $d > 0$ mit $f(d) < y$, und wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ gibt es ein $c < 0$ mit $f(c) > y$; wegen der Stetigkeit von f existiert also nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [c;d]$ mit $f(\xi) = y$. Folglich gilt $W_f = \mathbb{R}$.

c) Wir treffen die folgende Fallunterscheidung:

- Für $x < 1$ gilt $f(x) = x^2 - 2\,x + a + 1 = (x-1)^2 + a$; damit ist der Graph G_f im Bereich $]-\infty;1[$ der linke Ast einer nach oben geöffneten Parabel mit dem Scheitel $(1;a)$, und demnach ist f auf $]-\infty;1[$ streng monoton fallend.

- Für $x \geq 1$ gilt $f(x) = a\,x\,(2-x) = -a\,(x-1)^2 + a$; damit ist der Graph G_f im Bereich $[1; \infty[$ der rechte Ast einer nach unten geöffneten Parabel mit dem Scheitel $(1; a)$, und demnach ist f auf $[1; \infty[$ streng monoton fallend.

Damit ist die stetige Funktion f streng monoton fallend, insbesondere also umkehrbar. Zur Berechnung der Umkehrfunktion sei $y \in \mathbb{R}$.

- Für $y > a$ ist $x < 1$, und es gilt

$$f(x) = y \iff (x-1)^2 + a = y \iff (x-1)^2 = y - a \iff$$
$$\underset{x-1<0}{\iff} x - 1 = -\sqrt{y-a} \iff x = 1 - \sqrt{y-a}.$$

- Für $y \leq a$ ist $x \geq 1$, und es gilt

$$f(x) = y \iff -a\,(x-1)^2 + a = y \iff -a\,(x-1)^2 = y - a \iff$$
$$\iff (x-1)^2 = 1 - \frac{y}{a} \underset{x-1\geq 0}{\iff} x - 1 = \sqrt{1 - \frac{y}{a}} \iff x = 1 + \sqrt{1 - \frac{y}{a}}.$$

Insgesamt erhält man also

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \begin{cases} 1 + \sqrt{1 - \frac{y}{a}}, & \text{für } y \leq a, \\ 1 - \sqrt{y-a}, & \text{für } y > a. \end{cases}$$

38. a) Aus der Stetigkeit der beiden linearen Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x,$$

und

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = x + 1,$$

sowie der Betragsfunktion

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = |x|,$$

ergibt sich die Stetigkeit der Komposition

$$f_4 = f_2 \circ f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = f_2(f_3(x)) = |x| + 1,$$

sowie der Quotientenfunktion

$$f = \frac{f_1}{f_4} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{f_1(x)}{f_4(x)} = \frac{x}{|x| + 1}.$$

Zum Nachweis der Monotonieeigenschaft seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$.

- Fall 1: $0 \leq x_1 < x_2$: damit ist

$$f(x_1) = \frac{x_1}{|x_1| + 1} = \frac{x_1}{x_1 + 1} = 1 - \frac{1}{x_1 + 1} \quad \text{bzw.} \quad f(x_2) = 1 - \frac{1}{x_2 + 1}$$

und wir erhalten $1 \leq x_1 + 1 < x_2 + 1$ und damit

$$\frac{1}{x_1 + 1} > \frac{1}{x_2 + 1}, \quad \text{also} \quad f(x_1) = 1 - \frac{1}{x_2 + 1} < 1 - \frac{1}{x_2 + 1} = f(x_2).$$

- Fall 2: $x_1 < 0 \leq x_2$: damit ist
$$f(x_1) = \frac{x_1}{|x_1|+1} < 0 \leq \frac{x_2}{|x_2|+1} = f(x_2).$$
- Fall 3: $x_1 < x_2 < 0$: damit ist $0 < -x_2 < -x_1$, woraus sich gemäß Fall 1 dann $f(-x_2) < f(-x_1)$ ergibt. Wegen
$$f(-x_1) = \frac{-x_1}{|-x_1|+1} = -\frac{x_1}{|x_1|+1} = -f(x_1) \quad \text{bzw.} \quad f(-x_2) = -f(x_2)$$
erhalten wir $-f(x_2) < -f(x_1)$, also $f(x_1) < f(x_2)$.

Damit ist die Funktion f streng monoton wachsend.

b) Für alle $x > 0$ gilt
$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1} \quad \text{und damit} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = 1,$$
und für alle $x < 0$ gilt
$$f(x) = -f(-x) \quad \text{und damit} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} -f(x) = -1.$$
Damit ergibt sich unter Berücksichtigung der strengen Monotonie zunächst $W_f \subseteq\ ]-1;1[$; zum Nachweis von „$\supseteq$“ sei $y \in\ ]-1;1[$.
- Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ gibt es ein $b > 0$ mit $y < f(b)$, und
- wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) < y$;

nach dem Zwischenwertsatz gibt es nun ein $\xi \in\ ]a;b[$ mit $f(\xi) = y$. Insgesamt gilt also $W_f =\ ]-1;1[$.

c) Zur Berechnung der Umkehrfunktion $f^{-1} :]-1;1[\ \to \mathbb{R}$ betrachten wir ein $y \in\ ]-1;1[$ und treffen dabei die folgende Fallunterscheidung:
- Fall 1: $y \geq 0$. Für alle $x \geq 0$ gilt
$$f(x) = y \iff 1 - \frac{1}{x+1} = y \iff 1 - y = \frac{1}{x+1} \iff$$
$$\frac{1}{1-y} = x + 1 \iff x = \frac{1}{1-y} - 1 = \frac{1-(1-y)}{1-y} = \frac{y}{1-y}$$
- Fall 2: $y < 0$; damit ist $-y > 0$. Für alle $x < 0$ ist $-x > 0$, und es gilt
$$f(x) = y \iff f(-x) = -y \iff$$
$$-x = \frac{-y}{1-(-y)} = -\frac{y}{1+y} \iff x = \frac{y}{1+y}$$

Zusammenfassend erhält man also für die Umkehrfunktion
$$f^{-1} :]-1;1[\ \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$
Die Funktion f^{-1} ist als Umkehrfunktion einer auf einem Intervall (hier: $D_f = \mathbb{R}$) definierten, streng monotonen (hier: streng monoton wachsenden) Funktion f stetig.

39. a) Im Falle $f(0) = f(a)$ kann $\xi = a$ gewählt werden; sei also im folgenden $f(0) \neq f(a)$. Wir betrachten die Funktion

$$g : [0; a] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - f(x - a).$$

Da

$$f_1 : [0; a] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x - a,$$

als lineare Funktion stetig ist, ist wegen der Stetigkeit von f auch

$$f_2 = f \circ f_1 : [0; a] \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = f(f_1(x)) = f(x - a),$$

stetig, und damit ergibt sich die Stetigkeit von

$$g = f|_{[0;a]} - f_2 : [0; a] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - f_2(x) = f(x) - f(x - a);$$

darüber hinaus gilt

$$g(0) \cdot g(a) = (f(0) - f(-a))\,(f(a) - f(0)) = -\,(f(a) - f(0))^2 < 0.$$

Nach dem Nullstellensatz existiert also ein $\xi \in [0, a]$ mit $g(\xi) = 0$; damit gilt aber $f(\xi) = f(\xi - a)$.

b) Die Funktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - a^2)\,(x + 2a)$ ist (als Polynomfunktion) stetig, und es gilt $f(-a) = 0 = f(a)$. Für $\xi \in [0; a]$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\xi) = f(\xi - a) &\iff \\ (\xi^2 - a^2)\,(\xi + 2\,a) &= \big((\xi - a)^2 - a^2\big)\,((\xi - a) + 2\,a) \iff \\ (\xi - a)\,(\xi + a)\,(\xi + 2\,a) &= (\xi^2 - 2\,\xi\,a)\,(\xi + a) \underset{\xi+a>0}{\iff} \\ &\iff (\xi - a)\,(\xi + 2\,a) = \xi^2 - 2\,\xi\,a \iff \\ \xi^2 + a\,\xi - 2\,a^2 = \xi^2 - 2\,\xi\,a &\iff 3\,\xi\,a = 2\,a^2 \underset{a>0}{\iff} \xi = \tfrac{2}{3}\,a \end{aligned}$$

40. Wir betrachten die (als Differenz der beiden als stetig vorausgesetzten Funktionen f und g selbst) stetige Hilfsfunktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

- Für alle $x < 0$ gilt, da f monoton wächst, schon $f(x) \leq f(0)$, und damit

$$h(x) = f(x) - g(x) \leq f(0) - \underbrace{g(x)}_{\to+\infty} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty;$$

insbesondere gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$, und es gibt ein $a < 0$ mit $h(a) < 0$.

- Für alle $x > 0$ gilt, da g monoton fällt, schon $g(x) \leq g(0)$, und damit

$$h(x) = f(x) - g(x) \geq \underbrace{f(x)}_{\to+\infty} - g(0) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

insbesondere gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, und es gibt ein $b > 0$ mit $h(b) > 0$.

Damit ist die Einschränkung von h auf das abgeschlossene Intervall $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $h(a) \cdot h(b) < 0$; folglich gibt es nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in [a;b]$ mit

$$h(\xi) = 0, \quad \text{also} \quad f(\xi) - g(\xi) = 0 \quad \text{bzw.} \quad f(\xi) = g(\xi).$$

Folglich ist $(\xi; f(\xi)) = (\xi; g(\xi))$ ein gemeinsamer Punkt auf den Graphen G_f und G_g.