

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

33. Für die reellen Parameter $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda \sqrt{x^2 + 8} + \mu, & \text{für } x < -1, \\ (x - \lambda)(x - \mu), & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ \lambda |x - 2| + \mu & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

zu betrachten.

a) Wir treffen die folgende Fallunterscheidung bezüglich $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$:

- Fall 1: $a < -1$: Die Polynomfunktion

$$f_1 :]-\infty; -1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x^2 + 8,$$

und die lineare Funktion

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \lambda x + \mu,$$

sowie die Wurzelfunktion

$$f_3 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sqrt{x},$$

sind stetig; damit ist auch die Komposition

$$f_4 = f_3 \circ f_1 :]-\infty; -1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f_4(x) = f_3(f_1(x)) = \sqrt{x^2 + 8},$$

stetig. Demnach ist auch die Einschränkung

$$\begin{aligned} f|_{]-\infty; -1[} &= f_2 \circ f_4 :]-\infty; -1[\rightarrow \mathbb{R}, \\ f|_{]-\infty; -1[}(x) &= f_2(f_4(x)) = \lambda \sqrt{x^2 + 8} + \mu, \end{aligned}$$

von f auf das Intervall $]-\infty; -1[$ stetig; folglich ist f in a stetig.

- Fall 2: $-1 < a < 1$: Die Einschränkung $f|_{[-1; 1]}$ von f auf das Intervall $[-1; 1]$ ist wegen

$$f(x) = x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu$$

für alle $x \in [-1; 1]$ eine quadratische Funktion und damit insbesondere stetig; folglich ist f in allen Punkten $a \in]-1; 1[$ stetig.

- Fall 3: $1 < a$: Die linearen Funktionen

$$f_5 :]1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f_5(x) = x - 2,$$

und

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \lambda x + \mu,$$

sowie die Betragsfunktion

$$f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_6(x) = |x|,$$

sind stetig; damit ist auch die Komposition

$$f_7 = f_6 \circ f_5 :]1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f_7(x) = f_6(f_5(x)) = |x - 2|,$$

stetig. Demnach ist auch die Einschränkung

$$\begin{aligned} f|_{]1; \infty[} &= f_2 \circ f_7 :]1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \\ f|_{]1; \infty[}(x) &= f_2(f_7(x)) = \lambda |x - 2| + \mu, \end{aligned}$$

von f stetig; folglich ist f in a stetig.

b) Wegen

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} ((x - \lambda)(x - \mu)) = (-1 - \lambda)(-1 - \mu) = f(-1)$$

und (wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion)

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (\lambda \sqrt{x^2 + 8} + \mu) = \lambda \sqrt{(-1)^2 + 8} + \mu = 3\lambda + \mu;$$

damit ist f im Punkt $a = -1$ genau dann stetig, wenn

$$(1 + \lambda)(1 + \mu) = 3\lambda + \mu$$

gilt; wegen $(1 + \lambda)(1 + \mu) = 1 + \lambda + \mu + \lambda\mu$ ist dies aber zu $1 + \lambda\mu = 2\lambda$ äquivalent. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} ((x - \lambda)(x - \mu)) = (1 - \lambda)(1 - \mu) = f(1)$$

und (wegen der Stetigkeit der Betragsfunktion)

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (\lambda |x - 2| + \mu) = \lambda |1 - 2| + \mu = \lambda + \mu$$

damit ist f im Punkt $a = 1$ genau dann stetig, wenn

$$(1 - \lambda)(1 - \mu) = \lambda + \mu$$

gilt; wegen $(1 - \lambda)(1 - \mu) = 1 - \lambda - \mu + \lambda\mu$ ist dies aber zu $1 + \lambda\mu = 2\lambda + 2\mu$ äquivalent. Die Funktion f ist also genau dann stetig, wenn

$$1 + \lambda\mu = 2\lambda \quad \text{und} \quad 1 + \lambda\mu = 2\lambda + 2\mu$$

gilt. Aus beiden Gleichungen zusammen folgt

$$2\lambda = 1 + \lambda\mu = 2\lambda + 2\mu,$$

also $\mu = 0$ und $\lambda = \frac{1}{2}$; umgekehrt erfüllt das Paar $(\lambda, \mu) = (\frac{1}{2}, 0)$ beide Gleichungen.

Die also genau im Falle $(\lambda, \mu) = (\frac{1}{2}, 0)$ stetige Funktion lautet

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 8}, & \text{für } x < -1, \\ (x - \frac{1}{2}) \cdot x, & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2} |x - 2|, & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

34. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ betrachten wir die Funktion

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n - nx + 1.$$

a) Die Funktion

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n - nx + 1.$$

ist als Polynomfunktion stetig und besitzt wegen

$$f_n(0) = 1 > 0 \quad \text{und} \quad f_n(1) = 1 - n + 1 = 2 - n \underset{n \geq 3}{\leq} 0$$

nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi_n \in]0, 1[$. Für eine beliebige Nullstelle $\zeta_n \in]0, 1[$ gilt

$$\xi_n^n - n\xi_n + 1 = 0 = \zeta_n^n - n\zeta_n + 1, \quad \text{also} \quad \xi_n^n - \zeta_n^n = n\xi_n - n\zeta_n,$$

woraus sich

$$(\xi_n - \zeta_n) \cdot (\xi_n^{n-1} + \xi_n^{n-2} \cdot \zeta_n + \dots + \xi_n \cdot \zeta_n^{n-2} + \zeta_n^{n-1}) = n \cdot (\xi_n - \zeta_n)$$

und damit

$$(\xi_n - \zeta_n) \cdot \left(\overbrace{\underbrace{\xi_n^{n-1}}_{<1} + \underbrace{\xi_n^{n-2} \cdot \zeta_n}_{<1} + \dots + \underbrace{\xi_n \cdot \zeta_n^{n-2}}_{<1} + \underbrace{\zeta_n^{n-1}}_{<1}}^{n \text{ Summanden}} - n \right) = 0$$

ergibt. Da nun der zweite Faktor $\xi_n^{n-1} + \xi_n^{n-2} \cdot \zeta_n + \dots + \xi_n \cdot \zeta_n^{n-2} + \zeta_n^{n-1} - n$ des Produkts stets kleiner Null, folgt schon $\xi_n - \zeta_n = 0$ bzw. $\xi_n = \zeta_n$. Folglich gibt es genau eine Nullstelle $\xi_n \in]0, 1[$.

b) Wegen

$$f_n(0) = 1 > 0 \quad \text{und} \quad f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^n - n \cdot \frac{2}{n} + 1 = \underbrace{\left(\frac{2}{n}\right)^n}_{<1} - 1 < 0$$

besitzt die stetige Funktion f_n nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $]0, \frac{2}{n}[$; da ξ_n gemäß a) die einzige Nullstelle von f_n sogar im größeren Intervall $]0, 1[$ ist, folgt $\xi_n \in]0, \frac{2}{n}[$. Wegen

$$0 \leq \xi_n \leq \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ergibt sich mit Hilfe des Schrankenlemmas dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$.

35. a) Die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = x^2 - 2,$$

ist als quadratische Funktion insbesondere stetig; damit ist aber auch ihre Einschränkung f auf die Definitionsmenge $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$ und die Zielmenge $\mathbb{Q}$ stetig. Ferner gilt

$$f(0) = 0^2 - 2 = -2 < 0 \quad \text{und} \quad f(2) = 2^2 - 2 = 2 > 0.$$

Wegen

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

und der Irrationalität von $\sqrt{2}$ besitzt f in $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$ keine Nullstelle.

b) Der Nullstellensatz setzt eine stetige Funktion f auf einem reellen Intervall $[a, b]$ voraus da bei seinem Beweis auf die Vollständigkeit des Zahlbereichs $\mathbb{R}$ zurückgegriffen wird; die in a) betrachtete Funktion ist allerdings nur auf den rationalen Punkten des Intervalls $[0, 2]$ definiert.

36. Die Lösungen der zu betrachtenden Gleichung

$$\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c} = 0$$

entsprechen genau den Nullstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c};$$

diese ist zunächst als gebrochenrationale Funktion stetig. Wegen

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x-a}}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{\frac{2}{x-b}}_{\rightarrow \frac{2}{a-b}} + \underbrace{\frac{3}{x-c}}_{\rightarrow \frac{3}{a-c}} \xrightarrow{x \rightarrow a+} +\infty$$

gibt es ein $\alpha \in]a; b[$ mit $f(\alpha) > 0$, und wegen

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x-a}}_{\rightarrow \frac{1}{b-a}} + \underbrace{\frac{2}{x-b}}_{\rightarrow -\infty} + \underbrace{\frac{3}{x-c}}_{\rightarrow \frac{3}{b-c}} \xrightarrow{x \rightarrow b-} -\infty$$

gibt es ein $\beta \in]\alpha; b[$ mit $f(\beta) < 0$; damit existiert aber nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in]\alpha; \beta[\subseteq]a; b[$ mit $f(\xi) = 0$. Die entsprechende Argumentation liefert dann auch ein $\zeta \in]b; c[$ mit $f(\zeta) = 0$.