MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2013/14
Blatt 8
09.12.2013

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

29. In Abhängigkeit vom Parameter $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{(2x)^n}{1+x^{2n}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten. Für $x = 0$ ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Für $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(2x)^{n+1}}{1+x^{2(n+1)}} \cdot \frac{1+x^{2n}}{(2x)^n}\right| = \left|\frac{(2x)^{n+1}}{(2x)^n} \cdot \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}\right| = 2\,|x| \cdot \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}},$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Fall 1: $0 < |x| < 1$. Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n+2} = 0$, woraus sich

  $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\,|x| \cdot \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\,|x| \cdot \frac{1+0}{1+0} = 2\,|x|$$

  ergibt; nach dem Quotientenkriterium ist also in diesem Fall die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

  - für $2\,|x| < 1$, also für $0 < |x| < \frac{1}{2}$, konvergent sowie
  - für $2\,|x| > 1$, also für $\frac{1}{2} < |x| < 1$, divergent.

  Für $2\,|x| = 1$, also für $|x| = \frac{1}{2}$, ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß

  $$|a_n| = \left|\frac{(2\,x)^n}{1+x^{2n}}\right| = \frac{|2\,x|^n}{1+x^{2n}} = \frac{(2\,|x|)^n}{1+(x^2)^n} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+0} = 1$$

  keine Nullfolge und damit insbesondere die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

- Fall 2: $|x| = 1$. Damit ist $x^{2n} = 1$ sowie $x^{2n+2} = 1$ und folglich

  $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\,|x| \cdot \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1+1}{1+1} = 2$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$, weswegen die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium divergiert.

- Fall 3: $|x| > 1$. Damit ist $0 < \frac{1}{|x|} < 1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^{2n}} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{|x|}\right)^{2n} = 0$, woraus sich

  $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\,|x| \cdot \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^{2n+2}} = 2\,|x| \cdot \frac{x^{2n}\left(\frac{1}{x^{2n}} + 1\right)}{x^{2n}\left(\frac{1}{x^{2n}} + x^2\right)} =$$

  $$= 2\,|x| \cdot \frac{\frac{1}{x^{2n}} + 1}{\frac{1}{x^{2n}} + x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\,|x| \cdot \frac{0 + 1}{0 + x^2} = 2\,|x| \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2\,|x|}{|x|^2} = \frac{2}{|x|}$$

  ergibt; nach dem Quotientenkriterium ist also in diesem Fall die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

  - für $\frac{2}{|x|} < 1$, also für $2 < |x|$, konvergent sowie
  - für $\frac{2}{|x|} > 1$, also für $1 < |x| < 2$, divergent.

  Für $\frac{2}{|x|} = 1$, also für $|x| = 2$, ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß

  $$|a_n| = \left|\frac{(2\,x)^n}{1 + x^{2n}}\right| = \frac{|2\,x|^n}{1 + x^{2n}} = \frac{(2\,|x|)^n}{1 + (x^2)^n} = \frac{4^n}{1 + 4^n} =$$

  $$= \frac{4^n}{4^n\left(\frac{1}{4^n} + 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{4^n} + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{0 + 1} = 1$$

  keine Nullfolge und damit insbesondere die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Insgesamt konvergiert die gegebene Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn

$$|x| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{oder} \qquad |x| > 2$$

ist, also genau für alle

$$x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right[\cup \left]2; +\infty\right[.$$

30. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \text{mit} \qquad b_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Wir bestimmen zunächst das Vorzeichen der Reihenglieder b_n für alle $n \in \mathbb{N}$: ist n gerade, so ergibt sich

$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{>0} > 0;$$

ist n ungerade, so ergibt sich

$$b_1 = \frac{1}{1} + \frac{(-1)^1}{\sqrt{1}} = 1 - 1 = 0$$

sowie

$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n} + \frac{-1}{\sqrt{n}} = \frac{\overbrace{1-\sqrt{n}}^{<0}}{\underbrace{n}_{>0}} < 0 \quad \text{für} \quad n \geq 3.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ erhalten wir demnach

$$\begin{aligned} \overbrace{b_n}^{>0} \cdot \overbrace{b_{n+1}}^{<0} &< 0 \quad \text{für} \quad n \text{ gerade und damit } n+1 \text{ ungerade} \\ \underbrace{b_n}_{<0} \cdot \underbrace{b_{n+1}}_{>0} &< 0 \quad \text{für} \quad n \text{ ungerade und damit } n+1 \text{ gerade} \end{aligned}$$

und damit stets $b_n \cdot b_{n+1} < 0$.

b) Bekanntlich gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Wegen

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{ist auch} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0,$$

und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0 + 0 = 0;$$

damit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

c) Nach Aufgabe 22a) von Tutorium 6 gilt: ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ konvergent, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c_n \pm d_n)$ divergent. Da die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert und die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergiert, divergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^{2n}}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

und damit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{für alle } \; n \in \mathbb{N}.$$

Dabei gilt zum einen gemäß a)

$$a_n = \frac{b_n}{(-1)^n} = \begin{cases} b_n > 0, & \text{für } n \text{ gerade,} \\ -b_n \geq 0, & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

also $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und zum anderen gemäß b)

$$|a_n| = \left| \frac{b_n}{(-1)^n} \right| = |b_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; dagegen ist die Voraussetzung des Leibnizschen Konvergenzkriteriums verletzt, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (zumindest ab einem Index $n_0 \in \mathbb{N}$) monoton fallend ist. Für alle geraden $n \in \mathbb{N}$ gilt zwar

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) - \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &= -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \underbrace{-\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right)}_{<0} + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}_{<0} < 0 \end{aligned}$$

und damit $a_{n+1} < a_n$, für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) - \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \underbrace{\sqrt{n+1}}_{\geq\sqrt{n}} \cdot \underbrace{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}_{\geq 1}} \leq \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

zusammen also

$$a_{n+1} - a_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right)}_{\geq 0} > 0$$

und damit $a_{n+1} > a_n$.

31. a) Eine gebrochenrationale Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners definiert; wegen $x^2 = 4 \iff x = \pm 2$ ist also $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

b) Für alle $x \in D \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)\,(x+2)} = \frac{x-2}{x+2} = \frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}};$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 1$$

und

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0$$

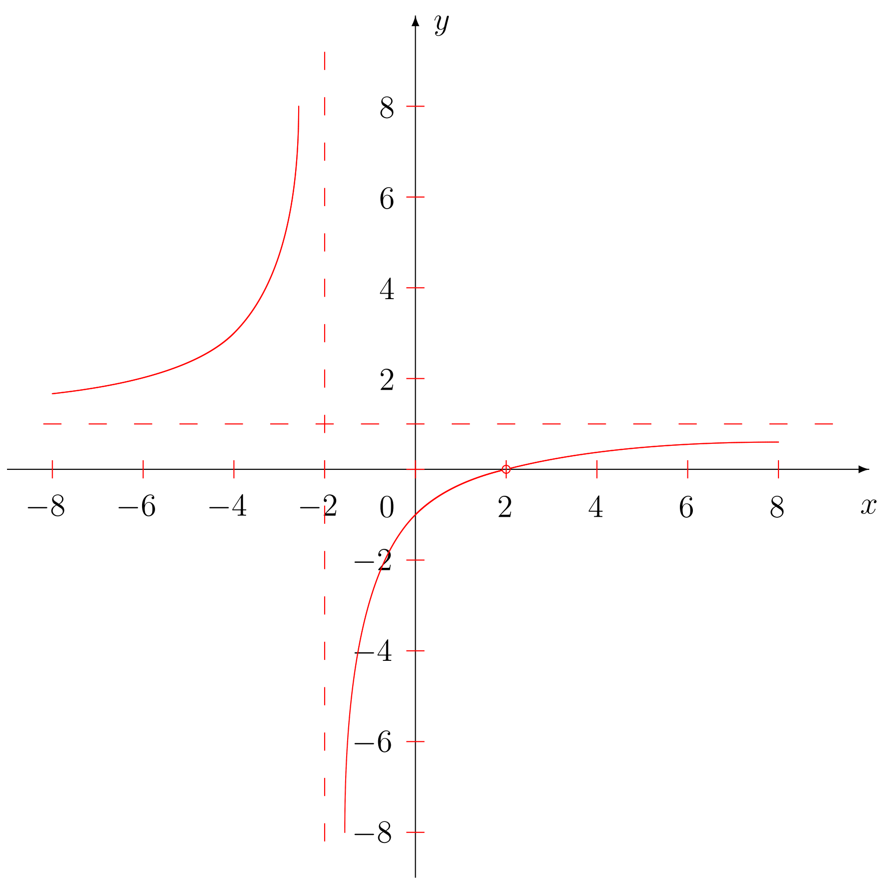
sowie

$$\lim_{x\to -2-} f(x) = \lim_{x\to -2-} \frac{x-2}{x+2} = \infty$$

und

$$\lim_{x\to -2+} f(x) = \lim_{x\to -2+} \frac{x-2}{x+2} = -\infty$$

c) f ist als gebrochenrationale Funktion in ihrem Definitionsgebiet D stetig; für ihren Graphen ergibt sich:



32. a) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} = \frac{1}{\frac{x}{|x|} \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{|x|}{x \cdot \sqrt{x^2+1}},$$

und damit erhält man

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} \underset{x>0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

und

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} \underset{x>0}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

sowie

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} \underset{x<0}{=} \lim_{x\to \infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

und

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} \underset{x<0}{=} \lim_{x\to 0-} \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} = -1.$$

b) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - |x|}{x}.$$

Für alle $x > 0$ ist

$$f(x) = \frac{x^2 - |x|}{x} = \frac{x^2 - x}{x} = \frac{x \cdot (x-1)}{x} = x - 1,$$

und damit erhält man

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x-1) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (x-1) = -1.$$

Für alle $x < 0$ ist

$$f(x) = \frac{x^2 - |x|}{x} = \frac{x^2 + x}{x} = \frac{x \cdot (x+1)}{x} = x + 1,$$

und damit erhält man

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (x+1) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (x+1) = 1.$$